Fachhochschule Münster
Fachbereich Bauingenieurwesen

Taschenrechnerkurs
Prof. Dr. Ing. V. Gensichen
Prof. Dr. rer.-nat. R. Runge

TI – Voyage 200

Inhaltsverzeichnis

(Stand: Okt. 2006)

0 VORBEMERKUNG ; ERSTE HILFE IN „NOTFÄLLEN“ ... 3

0.1 VORBEMERKUNG ... 3
0.2 ERSTE HILFE IN „NOTFÄLLEN“ ... 4

1 APPS – ARBEITSFLÄCHE , HAUPTBILDSCHIRM , MODUS – EINSTELLUNGEN ... 5

1.1 SPRACHE UND BILDSCHIRM EINSTELLEN ... 5
1.2 AUSSCHALTEN DES TI-V ... 6

2 ELEMENTARE ZAHLENRECHNUNGEN ... 8

2.1 BEZEICHNUNGEN DES HAUPTBILDSCHIRMS ... 8
2.2 KORREKTUREN IN DER EINGABEZEILE ... 8
2.3 ZAHLENRECHNUNGEN: EINFACHE BEISPIELE ... 9
2.4 SPEICHERN VON ZAHLEN, ERGEBNISSEN, TERMEN, FUNKTIONEN ... 12
2.4.1 Variablen-Namen ... 13
2.4.2 Speichern und Archivieren ... 13
2.5 RESULTATE, EINGABEN EINFÜGEN ... 17
2.6 EINIGE FUNKTIONEN ... 17
2.7 BRUCHRECHNUNG ... 18
2.8 POTENZEN UND WURZELN ... 19
2.9 AUSWERTEN UND UMFORMEN VON TERMEN; POLYNOMDIVISION ... 20

3 LÖSEN VON GLEICHUNGEN ... 22

3.1 VORBEMERKUNG ... 22
3.2 LINEARE UND NICHTLINEARE GLN MIT *EINER* UNBEKANNTEN ... 22
3.3 LINEARE UND NICHTLINEARE GLN MIT *ZWEI* UNBEKANNTEN ... 25
3.3.1 Lineare Gln mit zwei Unbekannten ... 25
3.3.2 Nichtlineare Gln mit zwei Unbekannten ... 26
3.4 *LINEARE* GLN MIT *ZWEI* (ODER MEHR) UNBEKANNTEN ... 27
3.5 *LINEARE* GLEICHUNGS-SYSTEME (LGS) ... 28
3.6 LÖSUNGEN KONTROLLIEREN ... 28
3.7 LÖSUNGSSUCHE ABBRECHEN ... 29
3.8 GONIOMETRISCHE GLEICHUNGEN ... 29
3.9 GLEICHUNGEN MIT KOMPLEXEN ZAHLEN ... 29
3.9.1 Komplexe Zahlen ... 29
3.9.2 Gleichungen und Gleichungssysteme für komplexe Zahlen ... 30
3.10 UNGLEICHUNGEN (MIT REELLEN ZAHLEN) ... 30

4 FUNKTIONEN, FUNKTIONSTABELLEN , GRAPHEN , KURVENDISKUSSION ... 31

4.1 FUNKTIONEN ... 31
4.1.2 FUNKTIONEN UNTERSUCHEN ... 31
4.1 FUNKTIONS-EINGABE UND TABELLEN ... 33
4.2 GRAPHEN ZEICHNEN ... 34
4.3 ABSCHNITTSWEISE DEFINIERTE FUNKTIONEN ... 37
4.4 KURVENDISKUSSION ... 38
4.5 BEISPIEL: DISKUSSION EINER ECHT GEBROCHEN RATIONALEN FUNKTION ... 42

5 DIFFERENZIALRECHNUNG ... 46

5.1 DIFFERENZIEREN ... 46

5.2 GRENZWERTE BERECHNEN ... 48
5.3 TAYLOR – REIHEN ... 49
5.4 FUNKTIONEN IN PARAMETERDARSTELLUNG ... 50
5.5 FUNKTIONEN IN POLARKOORDINATEN ... 51
5.6 PARTIELLE ABLEITUNGEN VON FUNKTIONEN MIT MEHREREN VERÄNDERLICHEN ... 51

6 LGS , DETERMINANTEN , MATRIZEN ... 52

6.1 ÜBERSICHT ... 52
6.2 MATRIZEN ... 53
6.2.1 Eingabe von Matrizen ... 53
6.2.2 Ändern von Matrizen ... 54
6.2.3 Löschen von Matrizen ... 54
6.2.4 Aufruf einzelner Elemente ... 55
6.2.5 Rechnen mit Matrizen ... 55
6.3 DETERMINANTEN ... 56
6.4 LÖSUNG DES LGS $K\,X = B$ ... 56

7 VEKTORRECHNUNG ... 60

7.1 VEKTOREN EINGEBEN UND SPEICHERN ... 60
7.2 GRUNDOPERATIONEN ... 61
7.3 SKALAR- , VEKTOR- UND SPATPRODUKT ; LINEARE UNABHÄNGIGKEIT ... 62
7.4 ZERLEGUNG EINES VEKTORS $\vec{F}$ IN DREI VORGEGEBENE RICHTUNGEN IM RAUM ... 64
7.5 VEKTORGEOMETRIE : PUNKT, GERADE, EBENE IN $\mathbb{R}3$ ... 65
7.5.1 Speichern einer Geraden ... 65
7.5.2 Liegt ein geg. Punkt P auf der Geraden ? ... 66
7.5.3 Lage zweier Geraden zueinander ; Abstand bzw. Schnittpunkt ... 67
7.5.4 Speichern einer Ebene ... 71
7.5.5 Punkt P auf der Ebene E ? / Abstand Punkt - Ebene / Normalen- und Lotvektor ... 71
7.5.6 Schnittgerade zweier Ebenen ... 73
7.5.7 Lage Gerade / Ebene; Schnittpunkt ... 75

8 INTEGRALRECHNUNG ... 77

8.1 VORBEMERKUNGEN ... 77
8.2 UNBESTIMMTE INTEGRALE ... 77
8.3 EINIGE PROBLEME ... 78
8.4 BESTIMMTE INTEGRALE UND FLÄCHENBERECHNUNGEN ... 80
8.4.1 Allgemeines ... 80
8.4.2 Bestimmte Integrale ... 80
8.4.3 Flächenberechnungen ... 81
8.4.4 Bestimmte Integrale / Flächenberechnung im Graphik - Modus ... 82

9 BESCHREIBENDE STATISTIK ... 84

9.1 GRUNDLAGEN ... 84
9.1.1 Arbeiten im Hauptbildschirm ... 84
9.1.2 Arbeiten mit Apps Stat./Listen ... 86
9.2 REGRESSION ... 86

10. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN ... 87

10.1 RICHTUNGSFELDER ... 87
10.2 LÖSUNG EINER DIFFERENZIALGLEICHUNG 1. ORDNUNG ... 88
10.3 LÖSUNG EINER DIFFERENZIALGLEICHUNG 2. ORDNUNG ... 88

Taschenrechner-Kurs für den TI – Voyage 200

Haben Sie Fehler entdeckt oder Verbesserungsvorschläge?
Bitte an mich weiterleiten, mündlich oder an runge@fh-muenster.de
(bitte Betreff „TR-Kurs" angeben!)

0 Vorbemerkung ; erste Hilfe in „Notfällen"

0.1 Vorbemerkung

Die meisten hier beschriebenen Vorgehensweisen gelten auch für die Vorgängermodelle (TI-92 Plus,...). Diese Modelle sind auch weiterhin noch gut für das Studium geeignet.
Da die Möglichkeiten des TI-V „ $\rightarrow \infty$ " gehen, können in diesem Kurs nur die für die Ingenieurmathematik wichtigsten Anwendungen besprochen werden. Vertiefte Kenntnisse kann sich jeder Nutzer mit Hilfe des auf CD-ROM mitgelieferten, über 1000 Seiten starken Handbuchs aneignen. Bevor diese Möglichkeit genutzt wird, sollten jedoch die in dem folgenden Kurs besprochenen elementaren Anwendungen gründlich eingeübt werden. Es ist besonders wichtig, dass die alltägliche Handhabung des Rechners im Bereich der Mathematik und des Bauingenieurwesens mit Sicherheit beherrscht wird.

Schließen Sie Ihren alten TR „unerreichbar" weg und nutzen Sie ab heute ausschließlich den TI-V !

Deshalb wird dringend empfohlen,

- Schritt für Schritt vorzugehen,
- nur die (passend zum Fortschritt des Studiums) aktuell erforderlichen Anwendungen zu üben, diese aber gründlich,
- möglichst viele Übungsaufgaben erst „ per Hand " , anschließend mit Hilfe des TR zu lösen (soweit dies möglich und sinnvoll ist),
- abzuwarten, bis in der Mathe-Vorlesung die Grundlagen zu den jeweiligen Anwendungsgebieten besprochen worden sind (z. B. Kurvendiskussion, Vektorrechnung, Matrizenrechnung, komplexe Zahlen).

Der TR-Kurs ist modular aufgebaut. Die einzelnen Teile des Kurses werden jeweils im Anschluss an die Behandlung eines Anwendungsgebietes in der Mathe-Vorlesung besprochen. Je nach Umfang wird der Teilkurs direkt in der Vorlesung oder zu einem gesonderten Termin durchgeführt.

Wer an den (freiwilligen) Sonderterminen nicht teilnehmen kann oder will, sollte sich unbedingt die Kursunterlagen besorgen. Da der behandelte Stoff auf den Umdrucken (mit Ausnahme einiger weniger Hervorhebungen und Randbemerkungen) vollständig wiedergegeben ist, kann die Anwendung auch selbstständig eingeübt werden.

Die Kursteilnehmer sollten wichtige Hinweise auf die Handhabung des TR zusätzlich in die entsprechenden Kapitel der Vorlesungsmitschrift übertragen, was für die Klausur vorteilhaft sein kann.

Literatur: Alle Bücher zum TI-92 Plus können verwendet werden,
insbesondere auch das deutsche Bedienungshandbuch zum TI-92 Plus.

Kurz und gut: Eicke, B.: Mathematikrezepte für den TI-89 und den TI-92 Plus.
(FH-Bibliothek vorh.)

Weitere Lit. auch auf der Internetseite von TI: education.ti.com/deutschland

Hilfen und Infos der Fa. Texas Instruments:

Sie können ein „Studentenkonto" mit der Ident-Nr. Ihres TR bei TI einrichten:

ti – cares @ ti.com

Abschließend eine Anmerkung zu den *„Versuchungen" der EDV* (PC bzw. TR):

Es ist zwar für das Studium und für die spätere Berufsausübung sehr nützlich, mit den Möglichkeiten der EDV sicher umgehen zu können. Zu Anfang des Studiums sollten Sie sich jedoch davor hüten, einen zu großen Teil Ihrer Zeit mit „EDV-Spielereien“ zu verbringen. Es besteht dann leicht die Gefahr „EDV-süchtig“ zu werden und die Aufarbeitung des umfangreichen Studienstoffes zu vernachlässigen. Die Quittung erhält man nach zwei oder drei Semestern bei den Klau-suren.

0.2 Erste Hilfe in „Notfällen“

- Eine (zu lange dauernde) Berechnung abbrechen
  (während der TI rechnet, erscheint rechts unten in der Statuszeile die Meldung „ in Arb “)

  [ON] - Taste drücken, anschließend [ESC] - Taste

- Der TI-V „hängt“, d. h. er reagiert nicht auf Tastatureingaben

  [2nd] [◁] drücken ; diese Tasten dann gedrückt halten,
  [ON] drücken und wieder loslassen.

  oder, wenn dies das Problem nicht behebt:

  1. Eine der 4 Batterien entfernen.
  2. Die Batterie wieder einsetzen ; hierbei die Tasten [(-)] [ )] gedrückt halten.
  3. Hiernach die Tasten [(-)] [ )] noch etwa 5 Sekunden gedrückt halten.

- Batterie-Wechsel
  Schwache Batterien werden durch die Anzeige „Batt“ in einem schwarz hinterlegten Feld in der Status-Zeile angezeigt. Vor dem Wechsel unbedingt

  TR ausschalten ([2nd] [OFF])

  Vorsicht! Nicht die Stützbatterie (Knopfzelle) herausnehmen!

  Anderenfalls wird ein großer Teil der Programme und der Speicherinhalte gelöscht. Als Sprache steht dann häufig nur noch ENGLISCH zur Verfügung. Weiteres Vorgehen s. nächsten Punkt.

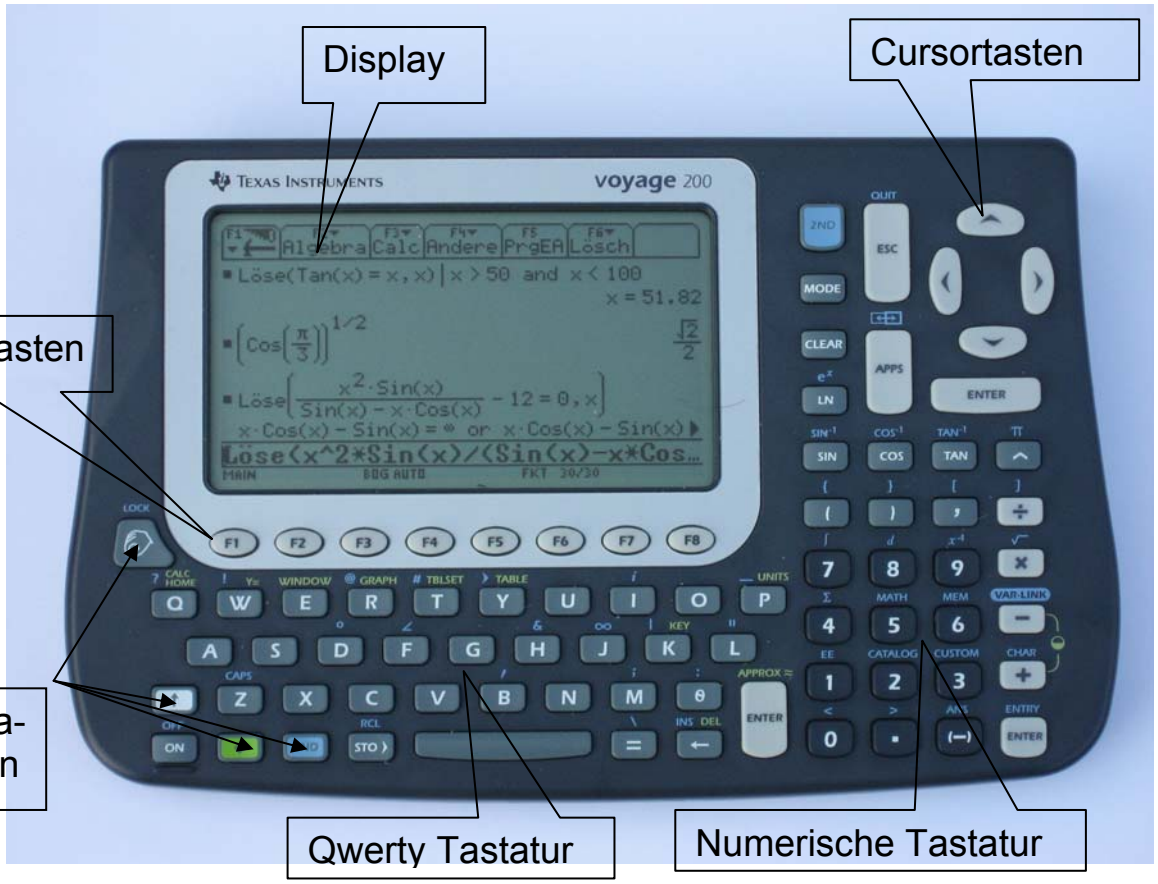
- Deutsche Sprache und weitere Programme sind gelöscht (z. B. nach Batteriewechsel)
  Mit Hilfe des TR – TR – Kabels können die fehlenden Programme usw. wieder von einem anderen TR geladen werden. Die genaue Vorgehensweise ist in der ausführlichen Betriebsanleitung (Internet) dargestellt, s. auch

  Umdruck „Zusammenschließen zweier Geräte“.

- Weitergehende Probleme
  Können Sie ein Problem nicht mit diesen Hilfen lösen, wenden Sie direkt an Texas Instruments (Internet- und eMail-Adressen s. vorige Seite)!

1 APPS – Arbeitsfläche , Hauptbildschirm , Modus – Einstellungen

TI Voyage 200



1.1 Sprache und Bildschirm einstellen

Einschalten mit Taste ON ⇒ APPS - Arbeitsfläche
Sprache von englisch auf deutsch umstellen:

MODE F3 Cursor-Taste: ▼ „English → “ ▶ „1: English” ▼
“ 2: Deutsch” ENTER ENTER

Der TR zeigt nun den Hauptbildschirm.

Hauptbildschirm als Standard-Arbeitsfläche einstellen:

Als Standard-Bildschirm erscheint nach dem Einschalten des TI-V die APPS-Arbeitsfläche. Da diese Fläche zunächst nicht benötigt wird, sondern i. allg. der Hauptbildschirm, wird die APPS-Fläche ausgeschaltet:

MODE F3 Cursor-Taste: ▼ (2x) „APPS . . . ON” →▶ „1: AUS“
„2: ON“
▲ ENTER ENTER

Der TR kehrt zum Hauptbildschirm zurück.
(Anm.: Die APPS-Fläche kann jederzeit durch Drücken der MODE-Taste usw. (s. o) eingeschaltet werden.)

1.2 Ausschalten des TI-V

Für das Ausschalten gibt es zwei Möglichkeiten:

entweder „BLAU“		oder „GRÜN“
[2nd] [OFF]	TR wird abgeschaltet ⇐	[♦] [OFF]

Nach dem Wiedereinschalten mit [ON] erscheint

der Hauptbildschirm	die vor dem Ausschalten zuletzt benutzte Arbeitsfläche

(z. B. Hauptbildschirm oder Graphik oder Tabelle oder . . .)

Die „blaue“ Variante dürfte also in den meisten Fällen zweckmäßig sein.
(Eselsbrücke: „OFF“ ist blau markiert: b vor g im Alphabet)

Ausnahme: Man unterbricht eine Untersuchung und will später genau dort weitermachen, wo man aufgehört hat.

1.3 Modus – Einstellungen [MODE]

Nach Drücken der Taste [MODE] können die gewünschten Formate der Ein- und Ausgabe (Zahlen, Winkel, Koordinatensysteme, geteilter Bildschirm, Zahlenbasis, Einheitensystem, Arbeitssprache usw.) eingestellt werden.

[MODE]

Die (vorerst) wichtigsten Einstellungen:

- Zahlenformat („angezeigte Ziffern“) (Mehr hierzu s. später)

  (Empfehlung: FLIESS 4)

  [MODE] ⊖ (2x) („angez. Ziffern“) ⊕ („1: FIX“) ⊖ (mehrfach) („I: FLIESS 4“) [ENTER] [ENTER]

- Ergebnis-Anzeige: („ AUTO / EXAKT / APPROXIMIERT “) (Genaueres → Kap. 2.3)

  (Die rechner-interne Genauigkeit bleibt „exakt“, auch bei Kettenrechnungen!)

  Beispiel : Der Modus „APPROX“ soll eingestellt werden

  [MODE] [F2] („voll“) ⊖ (2x) („Auto“) ⊕ „1: Auto“ ⊖ (2x)
  „2: Exakt“
  „3: Approx.” [ENTER] [ENTER]

  Anm.: Auch in den Einstellungen „EXAKT“ und „AUTO“ kann das Ergebnis in der Form „APPROX.“ angezeigt werden, wenn statt [ENTER] die Tastenkombination [♦] [ENTER] gedrückt wird. (→ Kap. 2.3)

- Winkelmaß („Winkel“) (Mehr hierzu → Kap.2.4)

Der TI-V ist auf das Bogenmaß („BOG“ in der Status-Zeile) voreingestellt. Alternativ ist die Einstellung auf Altgrad (DEG) oder Neugrad (GON) möglich.

Empfehlung: TR stets in der Voreinstellung ***Bogenmaß*** belassen
und Umrechnungsfaktoren (s. 2.4) benutzen!

Umstellung auf Altgrad :

[MODE] ⊖ (3x) („Winkel“) ⊕ „1: Bogenmaß“ ⊖
„2: Grad“ [ENTER] [ENTER]

Umstellung auf Neugrad :

[MODE] ⊖ (3x) („Winkel“) ⊕ „1: Bogenmaß“ ⊖
„2: Grad“ ⊖
„3: Gradian [ENTER] [ENTER]

Verlassen des MODE – Menüs:

Entweder mit [ENTER] [ENTER] (bestätigt die neu gewählten Einstellungen)
oder mit [ESC] [ESC] (bisherige Einstellungen bleiben unverändert
} Rückkehr zum Haupt-bildschirm

Es ist auch möglich, Winkel unabhängig von der Rechnereinstellung zu benutzen:

1) Der Winkel wird **immer** als **Altgrad** interpretiert:

[2nd] [D] ⇒ hinter der eingegebenen Zahl erscheint das Grad – Symbol (z. B. 45°)
[°]

2) Der Winkel wird **immer** als **Neugrad** interpretiert:

[2nd] [CHAR] [2] [0] ⇒ es erscheint das Gon - Symbol (z. B. 50^{G})

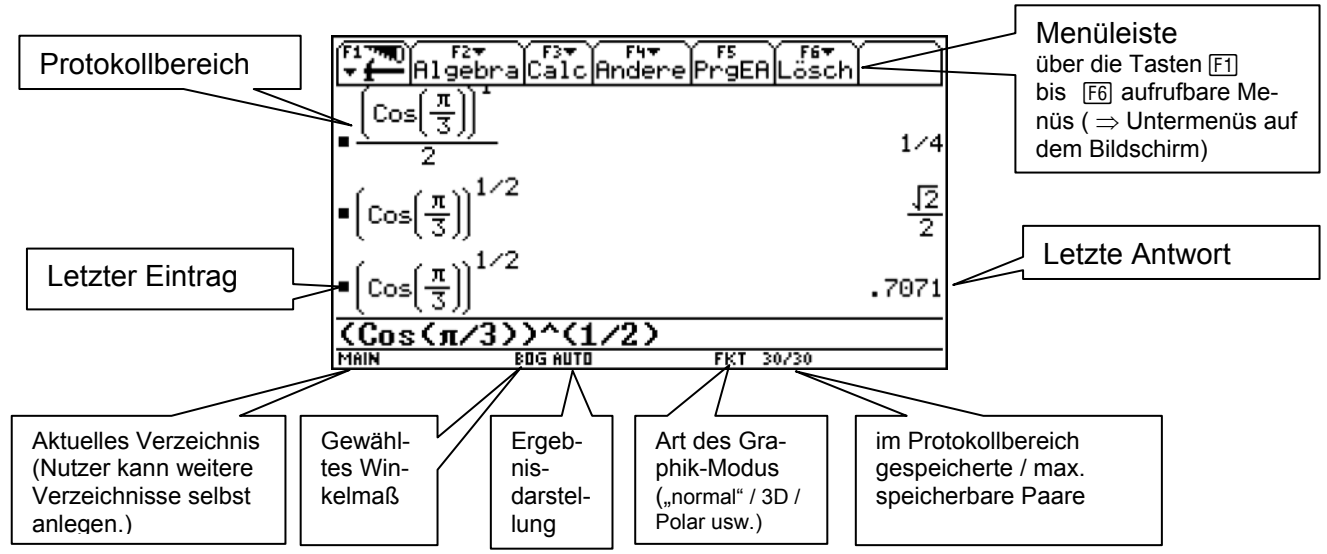
3) Der Winkel wird **immer** als **Bogenmaß** interpretiert:

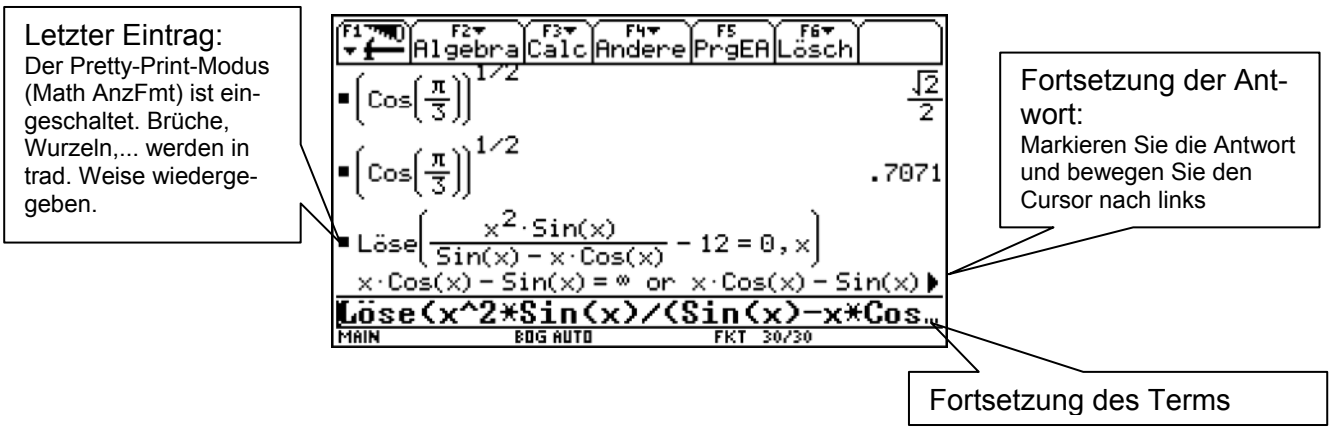
[2nd] [CHAR] [2] [6] ⇒ es erscheint das Rad - Symbol (z. B. 50^{r})

Die Fälle 2) und 3) sind aber nur als Ausnahmen zu empfehlen.

2 Elementare Zahlenrechnungen

2.1 Bezeichnungen des Hauptbildschirms





ACHTUNG! Alle im Protokollbereich gespeicherten Eingaben und Ergebnisse können in die Eingabezeile geholt werden:

Mit der Cursor-Taste ▲ (ggf. mehrfach) Eintrag markieren , ENTER .

2.2 Korrekturen in der Eingabezeile

a) CLEAR löscht erst die Zeichen RECHTS vom blinkenden Cursor-Zeichen, dann LINKS . Steht der Cursor am Anfang oder am Ende der Eingabezeile, wird also sofort die gesamte Eingabezeile gelöscht; desgleichen, wenn diese Zeile grau hinterlegt ist.

Anm.: Der Protokollbereich kann nicht mit CLEAR gelöscht werden! Hierzu die Tasten F1 8 drücken.

b) Korrekturen *während* der Eingabe (Cursor blinkt in der Eingabezeile)

- Löschen eines Zeichens:

  Den Cursor mit der Cursor-Taste ▶ bzw. ◀

  bzw. rechts neben das zu löschende Zeichen setzen, dann Taste ← drücken

  links neben . . . . . , dann Tasten ♦ DEL drücken.

- Einfügen eines Zeichens: ACHTUNG! Cursor blinkt als

  Rechteck ⇒ Zeichen wird ***überschrieben***

  schmaler Strich ⇒ Zeichen wird ***eingefügt***

  } Wechsel mit [2nd] [←]

Den (*schmal* blinkenden) Cursor mit ⊙ bzw. ⊙ an die Stelle bringen, an der das Zeichen stehen soll, dann Zeichen einfügen.

c) Korrekturen *nach* der Eingabe (also nach Drücken der [ENTER] - Taste)

Nach dem Drücken der [ENTER] - Taste erscheint die Eingabezeile dunkel hinterlegt; der Cursor blinkt *nicht*.

Durch Drücken der Taste ⊙ bzw. ⊙ wird der Cursor in die Eingabezeile gebracht

⊙ ⇒ Cursor blinkt am Zeilen-Ende *(rechts)*

⊙ ⇒ Cursor blinkt am Zeilen-Anfang *(links)*

Weiteres Verfahren wie unter b) beschrieben!

d) Cursor zum Anfang oder Ende der Eingabezeile springen lassen (wenn Cursor „irgendwo" in der Eingabezeile blinkt)

[2nd] ⊙ ⇒ Cursor blinkt am Zeilen-Ende

[2nd] ⊙ ⇒ Cursor blinkt am Zeilen-Anfang

Anm.: Entsprechend kann man den Cursor nach oben bzw. nach unten springen lassen:

- in vielen Menüs:

  [2nd] ⊙ ⇒ Cursor springt zum Seiten-Ende

  [2nd] ⊙ ⇒ Cursor springt zum Seiten-Anfang

- im Protokoll-Bereich: (vorher blinkenden Cursor mit ⊙ in den Protokoll-Bereich bringen)

  [♦] ⊙ ⇒ Cursor springt zum letzten Ergebnis (rechts unten im Protokoll-Bereich)

  [♦] ⊙ ⇒ Cursor springt zur ersten Eingabe (links oben im Protokoll-Bereich)

2.3 Zahlenrechnungen: Einfache Beispiele

([×] = Multiplikationstaste; nicht verwechseln mit dem Buchstaben *x*)

TR-Einstellung: FLIESS 4 , BOG , APPROX.

3 · 4 :	3 [×] 4	[ENTER]	⇒ 12.
3,1 · 4,4 :	3.1 [×] 4.4	[ENTER]	⇒ 13.64
-2 · 5 :	[(-)] 2 [×] 5	[ENTER]	⇒ –10.
5 · (-2) :	5 [×] [(-)] 2	[ENTER]	⇒ -10.

Klammern beim TI -V nicht erforderlich

falsch

Aber Vorsicht! $(-3)^2 = +9$: TI –V : [(-)] 3 [^] 2 [ENTER] ⇒ – 9.

[(] [(-)] 3 [)] [^] 2 [ENTER] ⇒ 9.

Klammer erforderlich! (bei anderen TRn nicht)

Vergleich der Modi „EXAKT“ , „AUTO“ , „APPROX“

Einstellung mit Hilfe der Tasten [MODE] [F2]

- **Mode „EXAKT“** (im Allgemeinen für „praktische Ing.-Berechnungen“ weniger geeignet, für manche Aufgaben beim symbolischen Rechnen jedoch nützlich)

  Beispiel: $3\sqrt{2}$

  3 [2nd] [√] *2* [)] [ENTER] ⇒ (Ergebnis-Anzeige) $3\sqrt{2}$

  Da man in der Regel ein Ergebnis in Form einer Dezimalzahl benötigt, ist diese Ergebnis-Darstellung häufig unzweckmäßig.

  Es ist aber möglich, auch im Mode „EXAKT“ eine Dezimalzahl anzeigen zu lassen, indem vor [ENTER] die [◆] -Taste gedrückt wird:

  3 [2nd] [√] *2* [)] [◆] [ENTER] ⇒ 4.243

- **Mode „APPROX“** (als Standardeinstellung für „praktische Ing.-Berechnungen“ geeignet, für manche Aufgaben beim symbolischen Rechnen jedoch unübersichtlich)

  Beispiel: $3\sqrt{2}$

  3 [2nd] [√] *2* [)] [ENTER] ⇒ 4.243

- **Mode „AUTO“** (gewöhnungsbedürftig, aber vielseitig)

  Diese Einstellung verwendet die „Exakt“-Form, wo es möglich ist, und die „Approx“-Form, wenn Zahlen mit Dezimalpunkt eingegeben werden.

  Beispiel: $3\sqrt{2}$

  Faktor 3 ohne Dezimalpunkt: *3* [2nd] [√] *2* [)] [ENTER] ⇒ $3\sqrt{2}$

  oder: *3* [2nd] [√] *2* [)] [◆] [ENTER] ⇒ 4.243

  Faktor 3 mit Dezimalpunkt: *3* [.] [2nd] [√] *2* [)] [ENTER] ⇒ 4.243

  Anmerkung : Der Dezimalpunkt kann auch im Radikanten (hier: hinter der 2) gesetzt werden, um das Dezimal-Format in der Ergebnis-Anzeige zu erzwingen; grundsätzlich reicht hierfür eine einziger Dezimalpunkt in der Eingabezeile.

Fazit

Man sollte sich konsequent an eine der drei Möglichkeiten gewöhnen, also

entweder „EXAKT“ (Eingabe i. Allg. mit [◆] [ENTER] , in besonderen Fällen nur mit [ENTER])

oder „APPROX“ (ggf. mit dem etwas umständlichen Wechsel in den „EXAKT“-Mode)

oder **„AUTO“** (schnelle Steuerung des Ausgabeformats mit [.] oder [◆] [ENTER])

(Empfehlung)

Interne Rechengenauigkeit

Unabhängig von diesen Einstellungen („EXAKT, APPROX, AUTO“) sowie des verwendeten Zahlenformats („FLIESS, FIX“) wird intern stets mit der vollen Genauigkeit des TI-V gerechnet.

Zahlenformate

Nach Drücken von [MODE] erscheint folgende Übersicht :

Exponentialformat = „NORMAL“ , „Angezeigte Ziffern“ s. Tabelle: (und „AUTO“)

Beispiel →	$3.\cdot\sqrt{2}$	$12.1 \cdot 9.35$	$0.0011 \cdot 0.0345$	$12987 \cdot 896{,}1$	$912987 \cdot 7548964$
FIX 0	4. 113.	4. E –5	11637651	7. E 12	
FIX 2	4.24	113.14	3.80 E –5	11637650.70	6.89 E 12
FLIESS	4.242....2	113.135	3.795 E –5	11637650.7	6.8921....7 E 12
FLIESS 2	4.2 1.1 E 2	3.8 E –5	1.2 E 7	6.9 E 12	
FLIESS 12	4.242....2	113.135	0.00003795	11637650.7	6.8921....7 E 12

(. . . heißt: insgesamt 12 Ziffern)

Ist das Ergebnis $> 10^{12}$, wird automatisch auf das E – Format umgeschaltet.

Eingabe im E-Format : Eingabe von $1{,}2 \cdot 10^{-8}$ 1.2 [2nd] [EE] [(-)] 8

Exponentialformat = „WISSENSCH“

Ergebnis-Format = Dezimalzahl

- mit 1 Ziffer (1 bis 9) vor dem Komma,
- Ziffernzahl nach dem Komma entsprechend der FIX - bzw. FLIESS - Einstellung,
- danach die Zehner-Potenz (max 10^{999} , min 10^{-999}) mit Vorzeichen (für größere bzw. kleinere Exponenten wird ∞ bzw. 0 angezeigt)

Beispiele: *2.47 E –2* bedeutet $2{,}47 \cdot 10^{-2} = 0{,}0247$

9.1237 E 3 “ “ $9.1237 \cdot 10^{3} = 9123{,}7$

Vorteil: platzsparende Dargestellung von Zahlen sehr unterschiedlicher Größenordnung.

Nachteil: grobe „Ablesefehler“, wenn die Zehnerpotenz übersehen wird; unanschaulich

Exponentialformat = „TECHNISCH“ (auch „ENG“, von Engineer)

Ergebnis-Format = Dezimalzahl

- mit 1 bis 3 Ziffern (1 bis 9) vor dem Komma,
- Ziffernzahl nach dem Komma entsprechend der FIX - bzw. FLIESS - Einstellung,
- danach eine durch 3 teilbare Zehner-Potenz
  (. . . , 10^{-6} , 10^{-3} , 10^{0} , 10^{3} , 10^{6} , . . .)

Beispiele:	0, 000 257	wird dargestellt als	*257 E –6*
	0, 002 57	“ “	*2.57 E – 3*
	0, 025 7	“ “	*25.7 E – 3*
	0, 257	“ “	*257 E – 3*
	2, 57	“ “	*2.57 E 0*
	25,7	“ “	*25.7 E 0*
	257	“ “	*257 E 0*
	2 570	“ “	*2.57 E 3*
	25 700	“ “	*25.7 E 3*
	257 000	“ “	*257 E 3*
	2 570 000	“ “	*2.57 E 6*
	usw.		usw.

Vorteil bei einheiten-behafteten Zahlen, deren Einheiten in durch 3 teilbare Zehner-Potenzen untergliedert sind (z. B. 1 km = 10^{3} m = 10^{6} mm ; 1 N = 10^{-3} kN = 10^{-6} MN). Platzsparende Darstellung.

Nachteil: grobe „Ablesefehler“, wenn die Zehnerpotenz übersehen wird; unanschaulich.

Zusätzliche Information:

International festgelegte Vorsätze (SI – Vorsätze)

Faktor	Name	Zeichen	Faktor	Name	Zeichen
10^{-18}	Atto	a	10^{1}	Deka	da
10^{-15}	Femto	f	10^{2}	Hekto	h
10^{-12}	Piko	p	10^{3}	Kilo	k
10^{-9}	Nano	n	10^{6}	Mega	M
10^{-6}	Mikro	µ	10^{9}	Giga	G
10^{-3}	Milli	m	10^{12}	Tera	T
10^{-2}	Zenti	c	10^{15}	Peta	P
10^{-1}	Dezi	d	10^{18}	Exa	E

2.4 Speichern von Zahlen, Ergebnissen, Termen, Funktionen

Zahlen, Ergebnisse, Terme, Funktionen usw. können unter einem Variablen-Namen in einem Speicher abgelegt werden.

2.4.1 Variablen-Namen

Regeln für Variablen-Namen:

– Name kann aus 1 bis 8 Buchstaben und Ziffern bestehen

– erstes Zeichen MUSS ein Buchstabe sein

– es dürfen keine vorbelegten Namen verwendet werden (wie z. B. *sin* , *abs* , usw.)

– kein Unterschied zwischen Groß- und Kleinbuchstaben

Umlaute: (ä , ö , ü)

2nd U (a bzw. o bzw. u)

gültige Variablen-Namen: *a* , *b* , *g1* , *f2c7* , *akglnd02* ; *sin1* (möglichst vermeiden!)

verbotene Namen: *1a* , *a 1* , *sin* (vorbelegt) , *q12345678* (> 8 Zeichen)

(Leerzeichen!)

Vorsicht: *8d* wird interpretiert als Produkt $8 \bullet d$, aber *d8* als eine Variable.

ad wird interpretiert als *eine* Variable mit dem Namen *ad* , nicht als Produkt von *a* und *d*.
(Für das Produkt von ***a*** und ***d*** ist also der Malpunkt erforderlich: ***a*** ⊠ ***d***)

Ausnahme: $5\pi = \pi 5 = 5 \bullet \pi = 15{,}7$ (π darf also nicht als Variablen-Name verwendet werden)

ACHTUNG! Den Variablen ***x , y , z*** sollten NIE Werte zugewiesen werden!
Sonst kann es u. a. Probleme beim symbolischen Rechnen, z. B. bei der Differential- und Integralrechnung geben (s. später).
(statt dessen z. B. *x1* , *x2* , *y1* , usw. zum Speichern von Werten verwenden)

!

2.4.2 Speichern und Archivieren

- **Speichern:**

  7 STO▶ *c* ENTER ⇒ 7

  a ^ *2* + *3* STO▶ *d* ENTER ⇒ $a^2 + 3$

  (wenn Speicher ***a*** leer ist; anderenfalls wird der Ausdruck mit dem aktuellen Wert von ***a*** ausgewertet)

Die Variablen *c* und *d* können nun einfach mit ihren Namen *c* und *d* in der Eingabezeile verwendet werden, wobei *c* mit dem Wert *7* und *d* mit dem Wert des Terms $a^2 + 3$ weiterverarbeitet werden.

- **Zuweisungsanordnung** (auch: „Ergibt-Anweisung“)

Allgemein bedeutet die Zuweisungsanordnung ***c := c + 5*** in der EDV folgendes:

Hole den aktuellen Wert von *c* aus dem Speicher namens *c* in den Arbeitsspeicher, addiere *5* hinzu und speichere diesen neuen Wert (hier = *12*) wieder im Speicher *c* .

Beim TI-V lautet der entsprechende Befehl: ***c*** + ***5*** STO▶ ***c*** ENTER ⇒ 12

Fehlermeldung „Zirkuläre Definition“: Dieser Befehl . . .

. . . ist nur zulässig, wenn der angesprochenen Speicher (hier : ***c***) nicht leer ist.

Beispiel: Der Speicher ***d2*** sei leer. Dann ergibt sich: ▶ s.

d2 + ***5*** STO▶ ***d2*** ENTER ⇒ Fehlermeldung „ *Zirkuläre Definition* “

- **„Leere“ Speicher** (d. h. einem Speicher wurde kein Wert zugewiesen, auch NICHT der Wert NULL !)

Sind z. B. ***r*** und ***s*** ohne Wertzuweisung, so wird allgemein mit den Variablen-Namen ***r*** und ***s*** weitergerechnet:

- **Speicher leeren**

  Unter ***s2*** und ***z1*** sind z. B. Werte gespeichert. Diese Speicher sollen aber für die weiteren Berechnungen „geleert“ werden:

  EntfVar ***s2*** [,] ***z1*** [ENTER] ⇒ Fertig

  (eintippen oder [F4] 4) (eine Variable oder Liste von Variablen) Falls die Variablen gesichert sind, erscheint eine entsprechende Fehlermeldung

  Alternative: [2nd] [VAR-LINK] ⇒ Es erscheint die Liste mit allen gespeicherten Variablen und Ausdrücken, alphabetisch geordnet.

  Um zur gesuchten Variablen ***s2*** zu gelangen, kann entweder mit dem Cursor ⊛ gescrollt werde (etwas mühsam); schneller : Buchstaben-Taste mit dem Anfangsbuchstaben der Variablen drücken (hier = ***s***)

  [S] ⇒ erste Variable mit dem Anfangsbuchstaben ***s*** erscheint.

  Weiteres Scrollen mit ⊛ ⇒ ***s2*** mit Angabe zum Typ über Art und Format des gespeicherten Ausdrucks erscheint.

  [F1] 1 ⇒ Es erscheint die Abfrage, ob *s2* gelöscht werden soll

  Bestätigung mit

  [ENTER] ⇒ Speicher *s2* ist „geleert“; die Variable *s2* ist aus der Liste gelöscht

  Rückkehr zum Hauptbildschirm mit [ESC]

- **Eine Variable aus dem Speicher abrufen / Speicherinhalt überprüfen**

  Beispiel: Der Speicherinhalt von ***s3*** soll angezeigt bzw. überprüft werden

  Möglichkeit 1 (in der Ergebniszeile):

  s3 [ENTER] ⇒ ***s3*** (wenn ***s3*** kein Wert zugewiesen wurde; anderenfalls wird der aktuelle Wert von ***s3*** angezeigt) (in der Ergebniszeile u. r.!)

  (ggf. kann der Wert von ***s3*** durch ⊛ [ENTER] in die Eingabezeile geholt und weiterverarbeitet werden)

  Möglichkeit 2 (in der Eingabezeile):

  [2nd] [RCL] ***s3*** [ENTER] ⇒ ***s3*** (wenn ***s3*** kein Wert zugewiesen wurde; anderenfalls wird der aktuelle Wert von ***s3*** angezeigt) (in der Eingabezeile ; d. h. der Wert kann direkt weiterverarbeitet werden)

  Möglichkeit 3 (in der Liste der Variablen):

  [2nd] [VAR-LINK] Gesuchte Variable *s2* in der Liste markieren, dann

  [ENTER] ⇒ ***s3*** erscheint als Name in der Eingabezeile.

  Soll der Wert von *s3* angezeigt werden, nochmals

  [ENTER] ⇒ Wert von *s3* erscheint in der Ergebniszeile.

- **<u>Speicherinhalt sichern</u>** oder **<u>archivieren</u>**

  Es gibt 2 Möglichkeiten, einen Speicherinhalt gegen Überschreiben zu schützen:

<u>Sichern</u> (Schloss-Symbol : 🔒)	<u>Archivieren</u> (Archiv-Symbol : ⌘)
Die Variable wird im RAM-Speicher gesichert.	Die Variable wird im Benutzer-Archiv-Speicher gesichert.
Sinnvoll bei Variablen, die hin und wieder geändert werden.	die als „Konstanten“ immer verfügbar sein sollen.
	Vorteile: größere Sicherheit (auch bei „Stromausfall“), Entlastung des RAM-„Rechen“-Speichers.

<u>(1) Speicher sichern</u> (Schloss-Symbol) / <u>Sicherung wieder aufheben</u>

Beispiel: Der Variablen ***h1*** soll der Wert *33* zugewiesen werden; anschließend Sicherung

33 [STO▶] ***h1*** [ENTER] ⇒ 33

Sperre ***h1*** [ENTER] ⇒ Fertig

(eintippen oder [2nd] [CATALOG] [S] [2nd] ⊙ , scrollen bis „Sperre“, oder [2nd] [VAR-LINK] [F1] 6)
(Groß- / Kleinschreibung ohne Bedeutung)

In der [VAR-LINK]- Liste (s. o.) ist vor der Variablen nun das Schloss-Symbol 🔒 zu erkennen.

<u>Sicherung wieder aufheben:</u> ***Entsperr*** ***h1*** [ENTER] ⇒ Fertig

(eintippen oder [2nd] [CATALOG] [E] [2nd] ⊙ , scrollen bis „Entperr“,
oder [2nd] [VAR-LINK] [F1] 6) (Groß- / Kleinschreibung ohne Bedeutung)

Alternativ kann die Sicherung auch in der [VAR-LINK]- Liste aufgehoben werden:

[2nd] [VAR-LINK] ⇒ Es erscheint die Liste mit allen gespeicherten Variablen und Ausdrücken, alphabetisch geordnet.

[H] ⇒ erste Variable mit dem Anfangsbuchstaben ***h*** erscheint

Weiteres Scrollen mit ⊙ , bis 🔒 ***h1*** markiert ist

[F1] [7] ⇒ das Schloss-Symbol verschwindet

(Mit [ESC] zum Hauptbildschirm zurück.)

<u>(2) Speicher archivieren</u> (Archiv-Symbol ⌘) / <u>Archivierung wieder aufheben</u>

Beispiel: Der Variablen ***e1*** soll der Wert e = 2,718 . . . (Basis der natürlichen Logarithmen) zugewiesen werden. Da dieser Wert häufig benötigt wird, aber nur etwas umständlich mit [2nd] [e^x] 1 [)] [ENTER] aufgerufen werden kann, ist es zweckmäßig, diese Zahl als Konstante dauerhaft zu archivieren:

[2nd] [e^x] *1* [)] [STO▶] ***e1*** [ENTER] ⇒ 2.718 . . .

Archiv ***e1*** [ENTER] ⇒ Fertig

(eintippen oder [2nd] [CATALOG] . . .)

In der [VAR-LINK]- Liste (s. o.) ist vor der Variablen nun das Archiv-Symbol ⌘ zu erkennen.

<u>Archivierung wieder aufheben:</u> ***AusArchv*** ***e1*** [ENTER] ⇒ Fertig

(eintippen oder [2nd] [CATALOG] . . .)

Weitere sinnvolle Beispiele für das Archivieren (⌑ - Symbol in der [VAR-LINK] - Liste):

UMRECHNUNGSFAKTOREN für WINKEL-EINHEITEN

Kennbuchstaben: Altgrad = ***a*** , Neugrad = ***n*** , Bogenmaß (rad) = ***r***

TR immer auf **BOG** lassen !

- Speichern

alternativ auch mit [2nd] [D] [°]

Altgrad ⇒ rad	*ar*	π ÷ 180	STO▸ ***ar*** ENTER
rad ⇒ Altgrad	*ra*	180 ÷ π	STO▸ ***ra*** ENTER
Neugrad ⇒ rad	*nr*	π ÷ 200	STO▸ ***nr*** ENTER
rad ⇒ Neugrad	*rn*	200 ÷ π	STO▸ ***rn*** ENTER
Altgrad ⇒ Neugrad	*an*	200 ÷ 180	STO▸ ***an*** ENTER
Neugrad ⇒ Altgrad	*na*	180 ÷ 200	STO▸ ***na*** ENTER

([2nd] [π] für π)

- Archivieren

Archiv ***ar*** , ***ra*** , ***nr*** , ***rn*** , ***an*** , ***na*** ENTER ⇒ Fertig

(Liste der Variablen, durch Kommas getrennt)

- Beispiele:

sin 45° = ? SIN *45* ***ar***) ENTER ⇒ .7071

30° in Neugrad = ? *30* ***an*** ENTER ⇒ 33.33

arcsin 0,5 = (in Altgrad) ? 2nd SIN . *5*) ENTER ⇒ .5236 (RAD !)

anschließend: × ***ra*** ENTER ⇒ 30. (ALTGRAD)

oder direkt: 2nd SIN . *5*) ***ra*** ENTER ⇒ 30. (ALTGRAD)

Es ist sinnvoll, weitere häufig benutzte Werte zu archivieren, z. B.

e	STO▸	*e1*
$\sqrt{2}$	STO▸	*w2*
$\sqrt{3}$	STO▸	*w3*

usw.

2.5 Resultate, Eingaben einfügen

Füge das letzte Resultat ein: 1.Weg: [2nd] [ANS]
2.Weg: Antw(1) [ENTER]
Füge das viertletzte Resultat ein: Antw(4) [ENTER]

Wiederhole die letzte Eingabe: 1.Weg: [2nd] [ENTRY]
2.Weg: Eingab(1) [ENTER]
Wiederhole die drittletzte Eingabe: Eingab(3) [ENTER]

2.6 einige Funktionen

Beliebige Funktionen bekommt man mit: [2nd] [CATALOG] wählen [ENTER]

Allgemeine trigonometrische Funktionen: [sin] [cos] [tan] **oder sin cos tan**

Inverse trigonometrische Funktionen: [sin^{-1}] [cos^{-1}] [tan^{-1}]

Es gilt nicht: $\tan^{-1}(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \cot(x)$ **.**

Richtige Eingabe z.B. für cot(π/4): [TAN] **(π/4)** [2nd] [x^{-1}] [ENTER]

Logarithmusfunktionen: [LN] natürlicher Logarithmus
log Logarithmus zur Basis 10

Exponentialfunktion: [2nd] [e^x]

Fakultätsfunktion: **5** [2nd] [W] [ENTER] ⟶ 120 Hinweis: [◊] [KEY]

algebraische Grundbefehle:

Rest bei ganzzahliger Division: a mod b: ***Mod***(14,4) [ENTER] ⟶ 2

Primfaktorzerlegung: ***Faktor***(120) [ENTER] ⟶ $2^3 \cdot 3 \cdot 5$

größter gemeinsamer Teiler: ggT(..,..) ***ggT***(28,36) [ENTER] ⟶ 4

kleinstes gemeinsames Vielfaches: kgV(..,..) ***kgV***(12,16) [ENTER] ⟶ 48

Primzahlentest: ***istPrim***(17) [ENTER] ⟶ wahr

Umwandlung gewöhnlicher Bruch ↔ Dezimalbruch

exakt(0.75) [ENTER] ⟶ ¾

exakt (0.1428) [ENTER] ⟶ $\frac{357}{2500}$

exakt (0.1428,0.001) [ENTER] ⟶ 1/7
bei der Genauigkeitsangabe 0.0001 wird 1/7 nicht gefunden!!

umgekehrt: 1./7 [ENTER] ⟶ .1429 (gewählte Zahlendarstellung: „FLIESS 4“
1/7 [◊] [ENTER] ⟶ .1429

2.7 Bruchrechnung

(hier gewählte Zahlendarstellung: „FLIESS 4“)

(ENTER – Taste in den folgenden Beispielen weggelassen!)

$\frac{2}{3}$: *2* ÷ *3* ⇒
- .6667 (Mode „APPROX.“ ; sowie „AUTO“, wenn 2 . statt 2 . . .)
- 2 / 3 (Mode „AUTO“ , „EXAKT“ , mit ENTER -Taste)
- .6667 (Mode „AUTO“ , „EXAKT“ , mit ♦ ENTER -Tasten)

$\frac{a}{b}$: ***a*** ÷ ***b*** ⇒
- $\frac{a}{b}$, wenn Speicher *a* und *b* nicht belegt sind
- .6667 („APPROX.“ , „AUTO“) (wenn Speicher *a* und *b* belegt sind; hier: *a* = 2., *b* = 3)
- 2 / 3 („EXAKT“)

Brüche werden grundsätzlich gekürzt:

oder (ohne Klammern) : ÷ ***a*** ÷ ***b*** ↔ NICHT zu empfehlen; s. Anm. im Kasten weiter unten!

$\frac{ac-ad}{ab}$: (*a* × *c* − *a* × *d*) ÷ (*a* × *b*)

⇒ $\frac{c-d}{b}$ (wenn die Speicher a bis d nicht belegt sind; anderenfalls werden die Zahlen eingesetzt)

Doppelbrüche werden zu einfachen Brüchen umgeformt (und ggf. ausgewertet):

$\frac{\frac{a}{c}\frac{b}{e}}{\frac{b}{a}\frac{d}{e}}$:

(Klammern um die einzelnen Zähler und Nenner nicht vergessen!)

(*a* × *b* ÷ (*c* × *e*)) ÷ (*b* × *d* ÷ (*a* × *e*))

⇒ $\frac{a^2}{c \cdot d}$

Anm.: Das Setzen der Klammern führt dazu, dass der eingegebene Bruch im Protokollbereich (Sichtkontrolle!!) wie in der handschriftlichen Notation erscheint. Anderenfalls erscheint ein völlig unübersichtlicher 6- oder achtfach-Bruch.

Kehrwert eines Bruches

$\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{3}$: (*3* ÷ *4*) ^ (-) *1* ⇒ 1.333 (bzw. 4 / 3)

Brüche zusammenfassen (Hauptnenner . . .)

Diese 1. Klammer erscheint zusammen mit dem Befehl F2 6

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$: ***gemNenn(*** *1* ÷ *a* + *1* ÷ *b*) ⇒ $\frac{a+b}{a \cdot b}$ *(ggf. zahlenmäßige Auswertung, wenn a und / oder b mit Zahlen belegt sind)*

eintippen oder F2 6

- wie oben, aber nur den Zähler darstellen:

  holeZähl(*1* ÷ *a* + *1* ÷ *b*) ⇒ *a + b* *(Umlaut ä : 2nd u a)*

  eintippen oder F2 B 1

- wie oben, aber nur den Hauptnenner darstellen:

  holeNenn(*1* ÷ *a* + *1* ÷ *b*) ⇒ $a \cdot b$

  eintippen oder F2 B 2

2.8 Potenzen und Wurzeln

(hier gew. Zahlendarstellung: „FLIESS 4“)

[ENTER] – Taste *in den folgenden Beispielen*

Es gibt <u>keine</u> [(. . .)²] und <u>keine</u> [∛...] - Taste!

Alles wird mit der [^] - Taste eingegeben!

$\sqrt[3]{2}$: *2* [^] [(] *1* [÷] *3* [)] ⇒

1.26	(Mode „APPROX.“ ; sowie „AUTO“, wenn 2 **.** statt 2 . . .)
$2^{1/3}$	(Mode „AUTO“ , „EXAKT“ , mit [ENTER] -Taste)
1.26	(Mode „AUTO“ , „EXAKT“ , mit [♦] [ENTER] -Tasten)

! (Klammern)

<u>Potenzieren von Potenzen</u>

$a^{b^c} = \begin{cases} a^{(b^c)} \\ (a^b)^c \end{cases}$??? ≠ Im Zweifelsfall also Klammern setzen:

2^{3^2} :

2 [^] *3* [^] *2*	⇒ 512	(also wie Zeile 3)
[(] *2* [^] *3* [)] [^] *2*	⇒ 64	(= 8^2 = 64)
2 [^] [(] *3* [^] *2* [)]	⇒ 512	(= 2^9 = 512)

Ohne Klammern (Zeile 1) wird der Ausdruck also vom TI-V „v.r.n.l“ abgearbeitet;
dies kann bei anderen Rechnern anders geregelt sein; im Zweifelsfall also Klammern setzen!

<u>Sehr große Ergebnisse:</u> Der TI-V rechnet bis $\mathbf{10^{999}}$! Diese Zahl ist viele Zehnerpotenzen größer als die Zahl aller im Weltall vorhandener Atome!

⇒ Das Problem „ Überlauf “ kommt in praktischen Berechnungen mit dem TI-V also nicht vor.

212^{550} : *212* [^] *550* ⇒

Überlauf (Fehlermeldung bei Mode „EXAKT“)

∞ („APPROX.“ , „AUTO“)

(Meldung unter der Eingabe-Zeile : „Überlauf ersetzt durch ∞ oder - ∞ “)
(d. h. *sehr große* Zahl außerhalb des vom TI-V darstellbaren Bereichs)

<u>Sehr kleine Ergebnisse:</u> Der TI-V rechnet bis $\mathbf{10^{-999}}$!

⇒ Das Problem „ Überlauf “ („ nach unten “) kommt in praktischen Berechnungen mit dem TI-V also nicht vor.

212^{-550} : *212* [^] [−] *550* ⇒

Überlauf (Fehlermeldung bei Mode „EXAKT“)

0 („APPROX.“ , „AUTO“) (irreführende Meldung hier müsste 0 stehen ; gemeint ist $\frac{1}{\infty} = 0$)

(Meldung unter der Eingabe-Zeile : „Überlauf ersetzt durch ∞ oder - ∞ “
(d. h. *sehr kleine* Zahl außerhalb des vom TI-V darstellbaren Bereichs)

2.9 Auswerten und Umformen von Termen; Polynomdivision

- Auswertung eines Terms

Der Term $a^3 + ab - b^2$ soll für $a = 2$ und $b = 3$ ausgewertet werden:

a [^] *3* [+] *a* [×] *b* [−] *b* [^] *2* [2nd] [K] *a* [=] *2* ␣ **and** ␣ *b* [=] *3* ⇒ 5

(notwendig; sonst Variable *ab*)

[|]

(senkrechter Strich)

(Symbol für Leertaste)

ACHTUNG ! Vorteile :

1. Dieser Ausdruck wird auch dann für $a = 2$, $b = 3$ ausgewertet, wenn ganz andere Werte für *a* und *b* gespeichert sind.
2. Die gespeicherten Werte bleiben erhalten, werden also nicht mit 2 und 3 überschrieben.
3. Der Ausdruck kann schnell auch für andere Werte von *a* und *b* ausgewertet werden: rechte Cursor-Taste drücken; die alte Werte von *a* und *b* in der Eingabezeile mit den neuen Werten überschreiben. (Alternative s. u.!)
4. Es können auch mehr als zwei auszuwertende Größen (aber auch nur eine Größe) in dem Term stehen.

Alternative zu 3.:

- Wiederholte Auswertung desselben Terms (für verschiedene Werte von *a* , *b* und ggf. weitere Größen)

Der Term $a^3 + ab - b^2$ soll für folgende Wertepaare von *a* und *b* ausgewertet werden:

$a = 2$, $b = 3$ $a = 5$, $b = 2$ $a = 4$, $b = 1$

Term unter einem beliebigen Namen (hier gew.: *f1, f2*) speichern:

(beliebiger Variablen-Name)

a) *a* [^] *3* [+] *a* [×] *b* [−] *b* [^] *2* [STO▸] *f1* (*a* , *b*) [ENTER] ⇒ Fertig

(auch mehr als 2 Variablen möglich)

b) when (x<0, sin(x), x^2) [STO▸] *f2* (x) [ENTER] ⇒ Fertig

Auswertung:

1)	***f1*** **(** *2* , *3* **)**	[ENTER]	⇒	5.
2)	***f1*** **(** *5* , *2* **)**	[ENTER]	⇒	131.
3)	***f1*** **(** *4* , *1* **)**	[ENTER]	⇒	67.
4)	***f2*** **(** $-\pi$ **)**	[ENTER]	⇒	0
5)	***f2*** **(** π **)**	[ENTER]	⇒	π^2

- Hinweis: Für Terme, die nur von einer einzigen Variablen abhängen, benutze man besser die vorbereiteten Funktionen y_1 bis y_{99} :

[♦] [Y=] . . . , dann für die Auswertung die . . .
[♦] [TABLE] . . . Tabellen – Fkt. und ggf. die . . .
[♦] [GRAPH] . . . Graphik – Fkt. usw.

} s. Kap.4

- Termumformungen überprüfen *(klappt nicht immer !)*

Prüfe, ob $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist.

1. Weg:

(a + b) ^ 2 = a ^ 2 + 2 a × b + b ^ 2 ENTER ⇒ „wahr"

2. Weg:

(a + b) ^ 2 − a ^ 2 − 2 a × b − b ^ 2 ENTER ⇒ 0

Weitere Beispiele: Bsp. 1: $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$??

2nd [√] x) + x = 1 ÷ [√] x) ENTER ⇒ „wahr"

Bsp. 2: $x = \frac{1}{x}$?? x = 1 ÷ x ENTER ⇒ $x = \frac{1}{x}$ (Speicher **x** ist nicht belegt!)

Bsp. 3: $a = \frac{1}{a}$??

a = 1 ÷ a ENTER ⇒
- $a = \frac{1}{a}$ (wenn Speicher **a** nicht belegt ist)
- „wahr" (wenn **a** = 1 gespeichert ist)
- „falsch" (wenn **a** ≠ 1 gespeichert ist)

• Term ausmultiplizieren Bsp.: (a + b) (a – b)

Entwick ((a + b) (a − b)) ⇒ $a^2 - b^2$ (wenn Speicher **a** und **b** nicht belegt sind)

eintippen oder F2 3

Anderenfalls wird der Term mit den gespeicherten Werten ausgerechnet (z. B. für **a** = 2 und **b** = 3 ⇒ – 5).

• Faktorisieren *(klappt nicht immer !)* Bsp.: ($a^2 - b^2$)

Faktor (a ^ 2 − b ^ 2) ⇒ (**a** + **b**) · (**a** – **b**) (wenn Speicher **a** und **b** nicht belegt sind)

eintippen oder F2 2

Sind für *a* und *b* die Werte 2 und 3 abgespeichert : ⇒ – 1. • 5.

(a – b) (a + b)

(Wert jeder einzelnen Klammer; hier in umgekehrter Reihenfolge)

WICHTIG ! Sollen die oben stehenden Operationen symbolisch (also nicht mit Zahlen) durchgeführt werden, sollten die zu untersuchenden Terme besser

- mit den Variablen **x , y , z** geschrieben werden und
- den Speichern **x , y , z** grundsätzlich KEINE WERTE zugewiesen werden.

Bei Verwendung anderer Variabler muss stets überprüft werden, ob deren Speicher nicht belegt sind.

• Polynom-Division $\frac{x^3 + 2x + 5}{x + 1}$:

PzlBruch ((x ^ 3 + 2 x + 5) ÷ (x + 1))

eintippen oder F2 7

⇒ $\frac{2.}{x + 1.} + x^2 - x + 3$

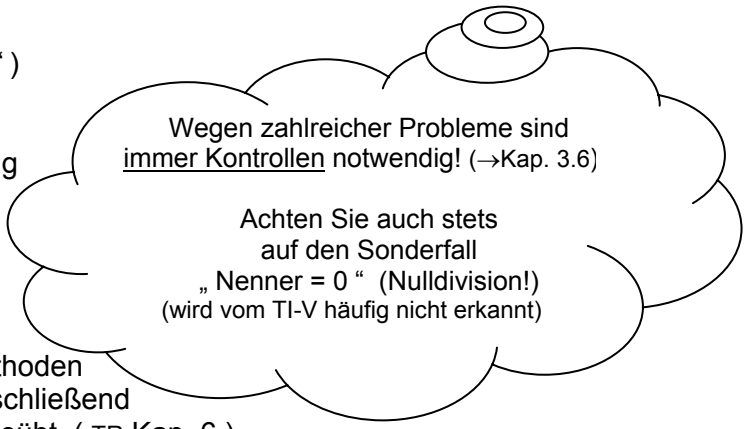
(echt gebrochener Anteil) (ganzrationaler Anteil)

3 Lösen von Gleichungen

(„*Löse*“ , „*Nullst*“ und „*LGlchSys*“)

3.1 Vorbemerkung

Im Bauing.-Wesen treten besonders häufig lineare Gleichungssysteme (LGS) (n Gln mit n Unbekannten) auf.
Für n > ≈ 2 sollten solche LGS stets systematisch mit Hilfe des Gauß-Verfahrens oder der Matrizenmethoden gelöst werden. Diese systematischen Methoden werden in der Vorlesung besprochen; anschließend wird deren Anwendung mit dem TI-V eingeübt (TR Kap. 6).



Die in den folgenden Unterkapiteln erläuterten Methoden „*Löse*“ und „*Nullst*“ eignen sich nur für maximal ≈ 2 (lineare bzw. nichtlineare) Gleichungen, „*LGlchSys*“ hingegen auch für eine größere Anzahl von (allerdings nur linearen) Gleichungen.
Die vom TI-V ermittelten Lösungen müssen insbesondere bei nichtlinearen Gleichungen auf Richtigkeit und Vollständigkeit überprüft werden!

3.2 Lineare und nichtlineare Gln mit *einer* Unbekannten

(„*Löse*“ , „*Nullst*“)

WEG 1	WEG 2
Löse (Ausdruck 1 **=** Ausdruck 2 ***, x)***	***NullSt (*** Ausdruck ***, x)***
entweder eintippen oder F2 **1**	entweder eintippen oder F2 **4**
Größe, nach der die Gl aufgelöst werden soll	(wie links)

ACHTUNG! Wenn irgend möglich, sollte ein Intervall vorgegeben werden, in welchem nach den Lösungen gesucht werden soll.
Anderenfalls „taucht“ der TR u. U. für mehrere Minuten „ab“ (Abbruch mit *ON*). Außerdem sind bei Ing.-Aufgabenstellungen häufig nur ganz bestimmte Lösungsintervalle von Interesse.

Vorgabe eines Lösungsintervalls (Vorsicht! Die Intervallgrenzen werden vom TI-V nicht immer beachtet!)

Löse (. . . **=** . . . ***, x)*** **|** ***x >*** 2

NullSt (. . . ***, x)*** **|** ***x >*** 2

2nd K

oder: . . . **|** ***x >*** 3 ***and x <*** 15 (usw.)

Vor- und Nachteile der beiden Methoden

Der Aufwand für die Eingabe ist bei beiden Wegen ungefähr gleich groß. Die Eingabe von „*Löse*“ ist wegen des Umlauts etwas umständlich. Bei „*NullSt*“ müssen die Gln immer auf die Form „. . . = 0“ gebracht werden; bei 2 Gln mit 2 Unbekannten müssen die Gln zusätzlich in eine geschweifte Klammer gesetzt werden. Die gefundenen Lösungen unterscheiden sich bei beiden Methoden i. Allg. nicht. Die Darstellung der Lösung ist bei „*NullSt*“ etwas klarer.

Es wird empfohlen, sich nur eine der beiden Methoden als Standard einzuüben.

Für 2 (oder mehr) *lineare* Gln erfordert „*LGlchSys*“ den geringsten Eingabeaufwand der in diesem Kap. besprochenen 3 Methoden (s. TR Kap. 3.4).

Beispiele: (Mode „ AUTO “ , Eingabe mit [ENTER] bzw. [♦] [ENTER])

Bsp. 1: Gesucht ist die Lösung der Gleichung $4x^2 - 3/x = 12$

1. Weg: ***Löse (4 x ^ 2 – 3 ÷ x = 12 , x)*** ⇒ *x = 1.846 or x = -.256 or x = -1.590*

2. Weg: Hier muss die Gleichung zunächst auf die Form **. . . = 0** gebracht werden; dann:

NullSt (4 x ^ 2 – 3 ÷ x – 12 , x) ⇒ *{ -1.590 -.256 1.846 }*

[Kontrollen: s. Kap. 3.6 !]

Bsp. 2a: Gesucht ist die Lösung der Gleichung $4x^2 + 4bx - 3b^2 = 0$

1. Weg: ***Löse (4 x ^ 2 + 4 b [×] x – 3 b ^ 2 = 0 , x)***

⇒ *x = .5 b or x = -1.5 b* (wenn Speicher *b* nicht belegt ist ;
anderenfalls wird das Ergebnis mit dem aktuellen Wert von *b* ausgewertet!)

2. Weg: ***NullSt (4 x ^ 2 + 4 b [×] x – 3 b ^ 2 , x)***

⇒ *{ .5 b -1.5 b }* (wenn Speicher *b* nicht belegt ist , usw. s. o.)

Die Ergebnisse werden nicht in den Speicher x übernommen!

Bsp. 2b: Geg.: $4x^2 + 4bx - 3b^2 = 0$
(wie Bsp. 2a ; jedoch soll diese Gl nicht nach *x* , sondern nach *b* aufgelöst werden)

1. Weg: ***Löse (4 x ^ 2 + 4 b [×] x – 3 b ^ 2 = 0 , b)***

⇒ *b = 2. x or b = -.667 x* (auch, wenn Speicher *b* belegt ist ;
das Ergebnis wird nicht in den Speicher *b* übernommen!)

2. Weg: ***NullSt (4 x ^ 2 + 4 b [×] x – 3 b ^ 2 , b)***

⇒ *{ 2. x -.667 x }* (Kommentar zu Speicher *b* wie bei Weg 1)

Bsp. 3: Gesucht ist die Lösung der Gleichung $4x^2 = -1$

1. Weg: ***Löse (4 x ^ 2 = – 1 , x)*** ⇒ *falsch* (Wurzel aus einer negativen Zahl; keine reelle Lösung)

2. Weg: ***NullSt (4 x ^ 2 + 1 , x)*** ⇒ *{ }* (leere Lösungsmenge; s. o.)

Bsp. 4: Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $\sin x = \cos x$

1. Weg: ***Löse (sin (x) = cos (x) , x)*** ⇒ *x = .785 (4. @n1 – 3)*

(= π / 4) (= beliebige ganze Zahl)

2. Weg: ***NullSt (sin (x) – cos (x) , x)*** ⇒ *{ .785 (4. @n2 – 3) }*

bzw. bei Eing. [♦] [ENTER] : $\frac{(4\ @n1 - 3)\ \pi}{4}$

Anm. zur Ergebnisanzeige:

@1 , @2 , usw. sind beliebige reelle Zahlen
@n1 , @n2 , usw. sind beliebige ganze Zahlen

Tauchen in *einer* Ergebnisanzeige zwei (oder mehr) der Symbole @1 , @2 (bzw. @n1 , @n2) auf, so sind diese beliebigen Zahlen voneinander unabhängig (vgl. auch TR Kap. 3.3).

Bsp. 5: Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $\tan x = x$ (vgl. Vorl.)

1. Weg: ***Löse (tan (x) = x , x)***

$\Rightarrow$ *x = -54.96 or x = -7.725 or x = -4.493 or x = 0 or x = 4.493 or x = 7.725 or x =54.96*

zusätzlich erscheint unter der Eingabezeile der Kommentar: *Weitere Lösungen möglich*

2. Weg: ***NullSt (tan (x) – x , x)***

$\Rightarrow$ *{ -54.96 -7.725 -4.493 0 4.493 7.725 54.96 }*

zusätzlich erscheint unter der Eingabezeile der Kommentar: *Weitere Lösungen möglich.*

Diskussion der Ergebnisse: (Da die Ergebnisse symm. zu $x = 0$ liegen, wird nur der Bereich $x > 0$ betrachtet)

- $x_1 = 4.493$ ist richtig (vgl. Vorlesung)
- alle weiteren Lösungen müssen $\approx$ den Abstand π haben; sie rücken immer dichter an die Polstellen ($(2n-1)\,\pi/2$) der Tangens-Funktion heran (vgl. auch Ü-Aufgaben).
- Hieraus folgt : zwischen den vom TI-V ermittelten Lösungen 7.725 und 54.96 müssen 14 weitere Lösungen liegen!
- Die Lösung $x = 54.96$ hat anscheinend folgenden Fehler:
  $\tan 54{,}96 = 55.95 \neq x = 54{,}96$ (≈ 2 %) ; Ursache s. Einsetzprobe in Bsp. 6.

Bsp. 6: Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $\tan x = x$ (wie Bsp. 5) , jedoch für $50 < x < 100$

1. Weg: ***Löse (tan (x) = x , x) | x >*** 50 ***and x <*** 100 $\Rightarrow$ *x = 51.82*

zusätzlich erscheint unter der Eingabezeile der Kommentar: *Weitere Lösungen möglich*

Im Modus „EXAKT“ ergibt sich : *x Cos(x) – Sin(x) = 0* (also nur eine Umformung der geg. Gl)

2. Weg: ***NullSt (tan (x) – x , x) | x >*** 50 ***and x <*** 100 $\Rightarrow$ { 51.82}

zusätzlich erscheint unter der Eingabezeile der Kommentar: *Weitere Lösungen möglich*

Im Modus „EXAKT“ ergibt sich : ***{ }*** (also keine Lösung)

zusätzlich erscheint unter der Eingabezeile der Kommentar: *Löse liefert u.U. mehr NS*

Einsetzprobe: $x = 51{,}82 \neq \tan 51{,}82 = 61{,}42$ (Fehler ≈ 20 %) $\Rightarrow$ Diese Lösung ist „falsch“
(wegen der Einstellung Fliess 4; ein genauerer Wert x = 51,816982 ergibt sich bei Fliess 8)
Ursache: Die Lösungen liegen unmittelbar neben den Polstellen der Tan-Fkt ;
d. h. : kleinste Änderungen von x $\Rightarrow$ sehr große Änderungen von $\tan x$.

Einsetzprobe mit genauem Wert $x = 51{,}81698\ldots$ (aus Protokollbereich übernehmen!) geht auf (entsprechend bei Bsp. 5).

Fazit aus den Beispielen

- Jede nicht kontrollierte Berechnung ist als falsch anzusehen.
- Rechnerbefragung ohne eigene Vorüberlegungen gleicht einem Blindflug.
  Besonders geeignet sind Lösungsskizzen (per Hand oder durch Nutzung der Graphik-Funktion des TI-V).
- Es kann vorteilhaft sein, die zu lösende Gleichung durch Umformen zu vereinfachen.

3.3 Lineare und nichtlineare Gln mit *zwei* Unbekannten

(„*Löse*“ , „*Nullst*“)

Im Prinzip gleiche Syntax wie bei *einer* Unbekannten. Die beiden Größen, nach denen die Gln aufzulösen sind, müssen jedoch in geschweifte Klammern gesetzt werden. Bei „*NullSt*“ sind zusätzlich auch die beiden Ausdrücke in eine geschweifte Klammer zu setzen.

3.3.1 *Lineare* Gln mit *zwei* Unbekannten

(„*Löse*“ , „*Nullst*“)

Bsp. 1: Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$x + 2a\,y = 1$$
$$3x + 4a\,y = 0$$

1. Weg: ***Löse (x + 2 a ⊠ y = 1 and 3 x + 4 a ⊠ y = 0 , { x , y })***

F2 1 ⇒ *x = -2 and y = 1.5 / a* (wenn Speicher a nicht belegt ist ; anderenfalls wird das Ergebnis mit dem aktuellen Wert von *a* ausgewertet!)

2. Weg: ***NullSt ({ x + 2 a ⊠ y – 1 , 3 x + 4 a ⊠ y } , { x , y })***

F2 4 ⇒ *[-2 1.5 / a]* (wenn Speicher a nicht belegt ist , usw. s. o.)

Zu beachten ist, dass bei *NullSt* auch die beiden Gln innerhalb einer geschweiften Klammer stehen müssen.

Bsp. 2: Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$x + 3y = 4$$
$$2x + 6y = 8$$

1. Weg: ***Löse (x + 3 y = 4 and 2 x + 6 y = 8 , { x , y })***

⇒ *x = -3.(@1 – 1.333) and y = @1*

2. Weg: ***NullSt ({ x + 3 y – 4 , 2 x + 6 y – 8 } , { x , y })***

⇒ *[-3.(@1 – 1.333) @1]* (statt @1 kann auch @2 angezeigt werden)

Interpretation des Ergebnisses: Die beiden Gln unterscheiden sich nur um den Faktor 2 ; sie sind also einander proportional. Dies bedeutet, dass nur es *nur eine* unabhängige Gl für *zwei* Unbekannte und somit unendlich viele Lösungen gibt (vgl. auch Vorlesung) :

$y = \underbrace{@1}_{\text{beliebige } \textit{reelle} \text{ Zahl}} \Rightarrow y$ ist beliebig, **$x =$** $-3 (\underbrace{@1}_{=y} - 1.333) =$ **$-3 (y - 1{,}333)$**

Bsp. 3: Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$x + 3y = 4$$
$$2x + 6y = 7$$

(wie Bsp. 2 , jedoch steht in der zweiten rechte Seite statt 8 nun 7)

1. Weg: ***Löse (x + 3 y = 4 and 2 x + 6 y = 7 , { x , y })***

⇒ *falsch* (d. h. keine Lösung)

2. Weg: ***NullSt ({ x + 3 y – 4 , 2 x + 6 y – 7 } , { x , y })***

⇒ *{ }* (d. h. keine Lösung)

Interpretation des Ergebnisses: Die linken Seiten der beiden Gln unterscheiden sich nur um den Faktor 2 , die rechten Seiten jedoch um einen Faktor $\neq 2$ ⇒ die beiden Gln widersprechen sich; es gibt keine Lösung (vgl. auch Vorlesung) .

3.3.2 *Nichtlineare* Gln mit *zwei* Unbekannten

(„*Löse*“ , „*NullSt*“)

Die Lösung nichtlinearer Gln ist mit einem deutlich erhöhten Aufwand verbunden. Die Ungenauigkeits- und die Fehlerquote sowie die Rechenzeit werden deshalb ebenfalls deutlich größer. (Abbruch von zu lange dauernden Berechnungen z. B. mit *ON* (anschließend *ESC*).)

Aus diesen Gründen empfiehlt es sich,

- die Gln auf eine möglichst einfache Form zu bringen
  (Brüche und Wurzeln beseitigen usw.)
- die Lösungen besonders sorgfältig zu kontrollieren
  (Scheinlösungen, fehlende Lösungen usw.)

Die Syntax unterscheidet sich in keiner Weise von der in Kap. 3.3.1 besprochenen.

*Nicht*lineare Gln weisen im Allgemeinen *mehrere* Lösungen für *jede einzelne* Unbekannte auf (z. B. quadratische Gl für $x \Rightarrow x_1 = \ldots\ , \ x_2 = \ldots$). Die Ergebnisse werden (falls die beiden Unbekannten (z. B. x und y) mehrere Lösungen aufweisen)

- bei „*Löse*“ mit „*or*“ zwischen den „Lösungspärchen“ angezeigt
- bei „*NullSt*“ mehrzeilig in eckigen Klammern dargestellt
  (zeilenweise: $x_1 = \ldots\ , \ y_1 = \ldots$
  $x_2 = \ldots\ , \ y_2 = \ldots$ usw.)

Bsp.: Gesucht ist die Lösung des $x + 2y = \sin x$ (1)

nichtlinearen Gleichungssystems $x^2 + y^2 = 4$ (2)

1. Weg: ***Löse (x + 2 y = Sin(x) and x ^ 2 + y ^ 2 = 4 , { x , y })***

$\Rightarrow$ *x = 1.936 and y = -.5o11 or x = -1.936 and y = .5011*

zusätzlich erscheint unter der Eingabezeile der Kommentar: *Weitere Lösungen möglich.*

2. Weg: ***NullSt ({ x + 2 y – Sin(x) , x ^ 2 + y ^ 2 – 4 } , { x , y })***

(Zu beachten ist wieder, dass bei *NullSt* auch die beiden Gln innerhalb einer geschweiften Klammer stehen müssen.)

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1.936 & -.5011 \\ -1.936 & .5011 \end{pmatrix}$ zusätzlich erscheint unter der Eingabezeile der Kommentar:

Weitere Lösungen möglich.

Kontrollen:

1.) Einsetzprobe *beider* Lösungspaare in *beide* Gln

2.) Kontrolle und Überprüfung, ob es weitere Lösungen gibt
(wegen der periodischen Sin-Funktion in Gl (1) besonders wichtig!)

Am besten ist in diesem Fall eine graphische Überprüfung geeignet. Mit Hilfe des TI-V – Graphik-Editors (s. TR Kap. 4) kann eine solche Kontrolle besonders schnell durchgeführt werden.

Gl (1) $\Rightarrow$ Graph: $y_1(x) = (\sin x - x) / 2$

Gl (2) $\Rightarrow$ Graph: $y_2(x) = +\sqrt{4 - x^2}$

(beide Vorzeichen beachten!) Graph: $y_3(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

$\Rightarrow$ nur 2 Schnittpunkte (*OK* !)

3.4 *Lineare* Gln mit *zwei* (oder mehr) Unbekannten

(„*LGlchSys*“)

„*LGlchSys*“ kann auch für mehr als 2 Gln mit 2 Unbekannten (n = 2) eingesetzt werden. Die Eingabe wird dann jedoch etwas unübersichtlich und sollte dann besser in Form von Matrizen erfolgen. Als Alternativen stehen das Gauß-Verfahren („*DiagForm*“ = 2nd Math 4 4)
und die Lösung mit Hilfe der Kehrmatrix zur Verfügung (s. TR Kap. und Vorlesung).

Syntax (für n = 2) :

LGlchSys ([1.Koeff. Gl 1 ***,*** 2.Koeff. Gl 1 ***;*** 1.Koeff. Gl 2 ***,*** 2.Koeff. Gl 2 ***] , [*** rechte S. Gl 1 ***;*** rechte S. Gl 2 ***])***

entweder eintippen oder 2nd [MATH] 4 5 (oder 2nd [CATALOG] L ENTER)

(Gegenüber „*Löse*“ und „*NullSt*“ brauchen also nur die Koeffizienten, nicht aber die Unbekannten und die Operatoren (+ - × ÷) eingegeben zu werden!)

Bsp. 1: Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$x + 2\,a\,y = 5$$
$$3x + 4\,a\,y = 6$$

LGlchSys ([*1 , 2 ; 3 , 4* ***] , [*** *5 ; 6* ***])***

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4. \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

(d. h. x = - 4
y = 4,5)

Bsp. 2: Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$x + 3y = 4$$
$$2x + 6y = 8$$

LGlchSys ([*1 , 3 ; 2 , 6* ***] , [*** *4 ; 8* ***])***

⇒ *Fehler : Singuläre Matrix*

Interpretation des Ergebnisses: Die beiden Gln unterscheiden sich nur um den Faktor 2 ; sie sind also einander proportional. Dies bedeutet, dass die Nennerdeterminante = 0 ist; die Marix ist singulär (weiteres s. Vorlesung). Im vorliegenden Fall ergibt sich eine unendliche Schar von Lösungen, was bei „*LGlchSys*“ im Gegensatz zu „*Löse*“ und „*NullSt*“ nicht angezeigt wird (vgl. Bsp. 2 in TR Kap. 3.3.1).

Bsp. 3: Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$x + 3y = 4$$
$$2x + 6y = 7$$

(wie Bsp. 2 , jedoch steht in der zweiten rechte Seite statt 8 nun 7)

LGlchSys ([*1 , 3 ; 2 , 6* ***] , [*** *4 ; 7* ***])***

⇒ *Fehler : Singuläre Matrix*

Es ergibt sich also die gleiche Fehlermeldung wie in Bsp. 2, obgleich es hier keine Lösungsschar gibt, weil die Gln sich widersprechen (vgl. Bsp. 3 inTR Kap. 3.3.1).

Hinsichtlich der Fehlermeldung ist „*LGlchSys*“ etwas ungenauer als „*Löse*“ und „*NullSt*“.

Bsp. 4: Geg.: LGS mit $n = 3$

$$2y + 3z = 4$$
$$5x + 6y + 7z = 8$$
$$9x + 8y + z = 12$$

LGlchSys ([0 , 2 , 3 ; 5 , 6 , 7 ; 9 , 8 , 1] , [4 ; 8 ; 12])

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -.973 \\ 2.649 \\ -.4324 \end{pmatrix}$$

(d. h. $x = -0{,}973$
$y = 2{,}649$
$z = -0{,}4324$)

Anm.: Jedes Semikolon kann durch 2 rechteckige Klammern ersetzt werden ($\Rightarrow$ Matrizen):

LGlchSys ([[0 , 2 , 3] [5 , 6 , 7] [9 , 8 , 1]] , [[4 ; 8 ; 12]])

Dieser Ausdruck wird automatisch in einer entsprechenden Matrizen-Form im Protokollbereich angezeigt und ggf. aus dem Protokollbereich in die Eingabezeile mit eckigen Klammern (ohne Semikolon) zurückgeladen.

3.5 *Lineare* Gleichungs-Systeme (LGS)

(n lineare Gln mit n Unbekannten) (Hinweis)

Für $n \geq 3$ sollten solche LGS stets in Matrizenform eingegeben werden und dann mit Hilfe des Gauß-Verfahrens („ *DiagForm* “), von „ *LGlchSys* “ oder der Kehrmarix a^{-1} gelöst werden.

$\Rightarrow$ s. Vorlesung und TR Kap. 6.

3.6 Lösungen kontrollieren

Auf Richtigkeit und Vollständigkeit der Lösungen ist bei Anwendung von EDV-Programmen und auch beim TI-V kein Verlass. Deshalb ist eine möglichst umfassende und unabhängige Kontrolle der Lösungen unumgänglich!

1. Sichtkontrolle, ob die gegebenen Gln richtig eingegeben wurden.
   (Überprüfung am besten nicht in der Eingabezeile, sondern im Protokollbereich, da die Darstellung der Gln dort der gewohnten handschriftlichen Schreibweise entspricht.

2. Plausibilitätskontrolle (mit dem scharfen Blick des Ingenieurs = gesunder Menschenverstand):
   Stimmen Vorzeichen, Größenordnung, Lösungsbereich usw. ?

3. Einsetzprobe: Lösungen „ganz oben“ in die Ausgangs-Gln einsetzen.

   Bsp. 1: Sind $x = 3$ und $x = 4$ Lösungen der Gl $x^2 + 2x - 24 = 0$?

   $x \text{ ^ } 2 + 2\,x - 24 = 0 \mid x = 3$ $\Rightarrow$ *falsch*

   $x \text{ ^ } 2 + 2\,x - 24 = 0 \mid x = 4$ $\Rightarrow$ *wahr*

   Sind mehrere Lösungen zu überprüfenden, braucht bei dieser Form der Kontrolle nur der alte mit dem neuen Wert von x am Ende der Eingabezeile überschrieben zu werden.

4. Graphische Kontrollen: (stets besonders zu empfehlen, da unabhängig und anschaulich!)

   entweder mittels einer Handskizze (Beispiele s. auch Vorlesung)
   oder mit Hilfe des Graphik-Bildschirms des TI-V (vgl. TR Kap. 4)

5. Problem anders formulieren oder aufbereiten, erneut mit dem TI-V lösen:

   $\Rightarrow$ unabhängiger Lösungsweg.

3.7 Lösungssuche abbrechen

(gilt auch allgemein bei anderen TR-Operationen mit dem TI-V)

Bei manchen Operationen kann es vorkommen, dass der TI-V minutenlang „abtaucht". (Das Feld „ *inArb* " ist schwarz hinterlegt rechts unterhalb der Eingabezeile aktiviert.)

Für den Abbruch einer solchen lang andauernden Operation gibt es einen „ harmlosen " Befehl (Weg 1) und zwei problem-behaftete Möglichkeiten (Wege 2 u. 3) :

1. Weg: (zu empfehlen, da hierbei keine Speicherinhalte verloren gehen)
ON - Taste drücken ⇒ *Fehler: Abbruch* (anschließend ESC drücken)

2. Weg: ON 2nd (Lock) gleichzeitig drücken

3. Weg: Eine der 4 Batterien ausbauen, während des Wiedereinbaus die Tasten (-) und) gleichzeitig gedrückt halten, und erst 5 Sekunden nach dem Wiedereinbau loslassen.

VORSICHT!
Speicherinhalte und Einstellungen gehen z. T. verloren!
⇒ TI-V wird auf den Standardzustand zurückgesetzt!

3.8 Goniometrische Gleichungen

Bestimme alle Lösungen von sin x = cos x:

Löse(sin(x)=cos(x),x) ENTER ⟶ $x = \frac{(4 \cdot @n1 - 3) \cdot \pi}{4}$

Erweitern und Zusammenfassen von trigonometrischen Termen:

tEntwick(sin(x+y)) ENTER ⟶ sin(x)·cos(y)+ sin(y)·cos(x)
tZusamm(sin(x)·cos(y)+ sin(y)·cos(x)) ENTER ⟶ sin(x+y)

Bei Problemen hilft es manchmal weiter, vor ***tEntwick*** zuerst ***tZusamm*** (und umgekehrt) anzuwenden. Es kann vorkommen, dass einzelne Lösungen fehlen. Eine Überprüfung der Lösungen ist daher bei goniometrischen Gleichungen besonders wichtig.

3.9 Gleichungen mit komplexen Zahlen

3.9.1 Komplexe Zahlen

komplexe Zahlen eingeben und speichern
a) in **Normalform**: 2+3* ***i*** **STO▸** z1_ **ENTER** ⟶ 2+3·***i***

Das Unterstreichzeichen _ kennzeichnet z als Variable, die eine komplexe Zahl enthält. Das Unterstreichzeichen ist nicht obligatorisch, aber speziell bei Gleichungen sehr zu empfehlen. Es wird erzeugt mit 2nd P . Die komplexe Zahl **i** wird eingegeben als 2nd i

b) in der **Hauptform** (Polarkoordinaten) (5∠60°) **STO▸** z2_ **ENTER** ⟶ $\frac{5}{2} + \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot i$

Die Operationen + - * / und ^stehen auch für komplexe Zahlen zur Verfügung. Der folgende Befehl ist neu für komplexe Zahlen

cFaktor(x^2+1) ENTER ⟶ (x + -***i***)·(x + ***i***)
Zum Vergleich: ***Faktor***(x^2+1) ENTER ⟶ x²+1 (d.h. keine Faktorisierung)

Umwandlung Normalform → Hauptform (Polarkoordinaten)

4+3*i* ▸ ***Polar*** ENTER ⟶ $e^{i\cdot\tan^{-1}(3/4)}\cdot 5$ ▸ wird erzeugt mit 2nd Y

4.+3*i* ▸ ***Polar*** ENTER ⟶ $e^{.643501\cdot i}\cdot 5$

Umwandlung Hauptform (Polarkoordinaten) → **Normalform**

3*e^(*i**π/3) ENTER ⟶ $3/2+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot i$

3.*e^(*i**π/3) ENTER ⟶ 1.5+2.59808·*i*

Funktionen für komplexe Zahlen

Die auf reelle Zahlen anwendbaren Funktionen stehen auch für komplexe Zahlen zur Verfügung. Die folgenden Funktionen sind neu oder haben eine etwas andere Bedeutung als bei reellen Zahlen.

abs(z1_)	Absolutbetrag von z1_
RealT(z1_)	Realteil von z1_
ImagT(z1_)	Imaginärteil von z1_
Konj(z1_)	zu z1_ konjugierte Zahl
Winkel(z1_)	Winkel von z1_ in der Hauptform (Arcus)

Das Anzeigeformat für komplexe Zahlen festlegen

Das Anzeigeformat wird festgelegt mit MODE :

- **Komplexes Format** = **Reell**: Komplexe Ergebnisse werden nur dann angezeigt, wenn in der gestellten Rechnung eine komplexe Zahl auftritt oder wenn ein Befehl für komplexe Zahlen verwendet wird, z.B. cFaktor, cLöse oder cNullst.
- **Komplexes Format** = **Karthesisch**: Komplexe Zahlen werden in der Form a+b·i angezeigt.
- **Komplexes Format** = **Polar**: Komplexe Zahlen werden in der Form $r\cdot e^{i\varphi}$ oder ($r\angle\varphi$) angezeigt.

3.9.2 Gleichungen und Gleichungssysteme für komplexe Zahlen

cLöse(z_^5-2*z_^4+2*z_^3=0,z_) ENTER ⟶ z_=1+*i* or z_=1-*i* or z_=0

cNullst(z_^5-2*z_^4+2*z_^3,z_) ENTER ⟶ { 1+*i* 1-*i* 0 }

cLöse (5*x+3*y=22 and (2+3**i*)*x-1/i*y=16**i*,{x,y}) ENTER ⟶

x=2+3·*i* and y=4-5·*i*

Probleme cLöse(z+2**i*Konj(z)=8+7**i*,z) ENTER ⟶ z=22/5-9/5·*i*

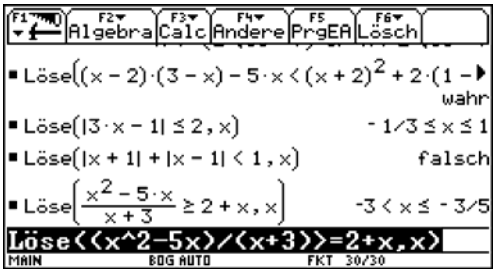
Diese Lösung ist falsch. Der Fehler entsteht dadurch, dass z nicht als komplexe Variable gekennzeichnet wurde. Deshalb interpretiert der Rechner z als reelle Variable und vereinfacht Konj(z) zu z. Bei Verwendung von z_ erhält man die richtige Lösung:

cLöse(z_+2**i*Konj(z_)=8+7**i*,z_) ENTER ⟶ z_= 2 + 3 · *i*

Lineare Gleichungssysteme mit komplexen Zahlen können auch mit „ *LGlchSys* “ gelöst werden.

3.10 Ungleichungen (mit reellen Zahlen)

Mit **Löse** lassen sich auch Ungleichungen lösen



4 Funktionen, Funktionstabellen , Graphen , Kurvendiskussion

4.1 Funktionen

4.1.1 Funktionen definieren und berechnen

sin(x)+x^2 STO▶ f1(x) ENTER ⟶ Fertig

when (x<0, sin(x), x^2) STO▶ f2(x) ENTER ⟶ Fertig

Einen Funktionswert einer vorher definierten Funktion berechnen

f1(1) ENTER ⟶ sin(1)+1

f(1.) ENTER ⟶ 1.841

f2(-π) ENTER ⟶ 0

f2(π) ENTER ⟶ π²

4.1.2 Funktionen untersuchen

Nullstellen berechnen: x^3-3*x^2-x+3 STO▶ f(x) ENTER ⟶ Fertig

Nullst(f(x),x) ENTER ⟶ {-1 1 3}

Maximal- und Minimalstelle der Funktion f mit f(x)=x³-3x²-x+3 bestimmen:

fmax(f(x),x) ENTER ⟶ x=∞

fmin(f(x),x) ENTER ⟶ x=-∞

fmax(f(x),x)|x>=0 and x<=10 ENTER ⟶ x=10

fmin(f(x),x)|x>=0 and x<=10 ENTER ⟶ $x = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$

Bogenlänge zwischen zwei Punkten: x^2 STO▶ f(x) ENTER ⟶ Fertig

BogIng(f(x),x,0,2) ENTER ⟶ $\frac{\ln\left(\sqrt{17}+4\right)}{4}+\sqrt{17}$

Die Bogenlänge kann nur bei wenigen Funktionen exakt berechnet werden. Vor allem, wenn die Funktion Parameter enthält, wird oft ein „Zwischenresultat“ $\int_{\ldots}^{\ldots} \sqrt{\ldots}\,dx$ angegeben, das der Rechner nicht weiter vereinfachen kann. Bei der Einstellung „Auto“, bzw. „Approximiert“ wird dann der Näherungswert dieses Integrals angegeben.

Untersuchung auf Symmetrie

sin(x)*cos(x) STO▶ f(x) ENTER ⟶ Fertig
(x^2-x-12)/(x+2) STO▶ g(x) ENTER ⟶ Fertig

Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse:

f(x)=f(-x) ENTER ⟶ sin(x)·cos(x)=- sin(x)·cos(x)

g(x)=g(-x) ENTER ⟶ $\frac{x^2-x-12}{x+2}=\frac{-\left(x^2+x-12\right)}{x-2}$

Beide Resultate sind nur für spezielle Werte von x wahr, weshalb keine Achsensymmetrie vorliegt.

Achsensymmetrie bezüglich der Geraden x = π/4:

f(π/4+x)=f(π/4-x) ENTER ⟶ wahr

g(π/4+x)=g(π/4-x) ENTER ⟶ $\frac{16\cdot x^2+8\cdot(\pi-2)\cdot x+\pi^2-4\cdot\pi-192}{4\cdot(4\cdot x+\pi+8)}=\frac{-(16\cdot x^2-8\cdot(\pi-2)\cdot x+\pi^2-4\cdot\pi-192)}{4\cdot(4\cdot x-\pi-8)}$

Bei f liegt die untersuchte Symmetrie vor, bei g nicht.

Punktsymmetrie bezüglich (0 ; 0)

f(x)=-f(-x) ENTER ⟶ wahr

g(x)=-g(-x) ENTER ⟶ $\frac{x^2-x-12}{x+2}=\frac{x^2+x-12}{x-2}$

Bei f liegt die untersuchte Symmetrie vor, bei g nicht.

Punktsymmetrie bezüglich (-2 ; -5)

-5-f(-2+x)=f(-2-x) –(-5)ENTER ⟶ -sin(x-2)·cos(x-2)-5=5-sin(x+2)·cos(x+2)

-5-g(-2+x)=g(-2-x) ENTER ⟶ wahr

Bei g liegt die untersuchte Symmetrie vor, bei f nicht.

Funktionsgleichung aus einigen Punkten bestimmen (Interpolation)
Für Funktionen „beliebigen" Typs

Beispiel: Gesucht ist die Funktion $f(x)=ax^4+bx^2+c$, die durch die drei Punkte (-2; -1), (1; ½) und (3; 16,5) verläuft?

1. Schritt: Typ der Funktion festlegen:
   a*x^4+b*x^2+c STO▶ f(x) ENTER ⟶ Fertig
2. Schritt: Gleichungssystem aufstellen und lösen:
   Löse(f(-2)=-1 and f(1)=1/2 and f(3)=16+1/2, {a,b,c}) ENTER ⟶
   a=1/2 and b=-3 and c=3
3. Schritt: Gefundene Lösungen in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen:
   f(x) | Antw(1) ENTER ⟶ $\frac{x^4}{2}-3\cdot x^2+3$

Damit dieser Weg überhaupt funktionieren kann, müssen so viele Punkte bekannt sein, wie Parameter (a, b, c,...) zu bestimmen sind

Für Funktionen von einem der folgenden Typen:

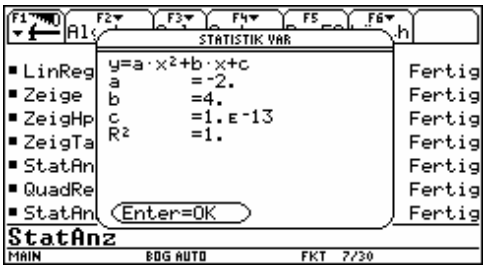
LinRegr	ax+b
QuadRegr	ax^2+bx+c
KubRegr	ax^3+bx^2+cx+d
QuartReg	$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
ExpRegr	$a\cdot b^x$
LnRegr	a+b·ln x
LgstRegr	$\frac{a}{1+b\cdot e^{c\cdot x}}+d$
PotzRegr	$a\cdot x^b$
Sinregr	a·sin(b·x+c)+d

Beispiel: Gesucht ist die Funktion $f(x)=ax^2+bx+c$, die durch die drei Punkte (0; 0), (1; 2) und (2; 0) verläuft?

1. Schritt: x- und y-Werte zu Listen zusammenfassen:
   {0, 1, 2} STO▶ xwerte ENTER ⟶ {0 1 2 }
   {0, 2, 0} STO▶ ywerte ENTER ⟶ {0 2 0 }

2. Schritt: Typ wählen und die Funktionsgleichung bestimmen lassen:

QuadRegr xwerte, ywerte ENTER ⟶ Fertig



3. Schritt: Ergebnisse anzeigen lassen:

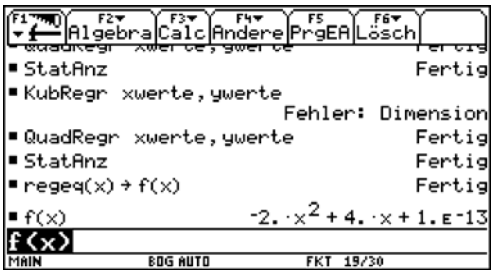
StatAnz ENTER ⟶

Also ist f(x)=-2x²+4x. (c wird vernachlässigt, da es praktisch 0 ist; R² ist ein Maß für die Genauigkeit des Resultates. R² kann zwischen 0 und 1 liegen; 1 bedeutet, dass die angegebene Funktion exakt durch die vorgegebenen Punkte verläuft).
Dieser Weg funktioniert nur, wenn (mindestens) so viele Punkte bekannt sind, wie Parameter (a, b, c, d,...) bestimmt werden müssen. Wenn weniger Punkte bekannt sind, erscheint die Fehlermeldung: **Dimension**. Wenn mehr Punkte bekannt sind, liegen in der Regel nicht mehr alle Punkte auf dem Graphen der gefundenen Funktion. Dann wird eine „möglichst gut passende" Funktion bestimmt, und R² wird kleiner als 1 sein. Man spricht dann von **Regression**.

4. Schritt: Speichern der gefundenen Funktion (bei vorgegebenen Typen):

regeq(x) STO▸ f(x) ENTER ⟶ Fertig

anzeigen der Funktion: f(x) ENTER ⟶



4.1 Funktions-Eingabe und Tabellen

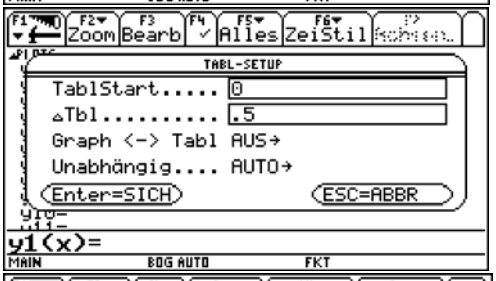
Die Wertetabelle für eine oder mehrere Funktionen aufstellen:
Beispiel: Für die Funktionen $y = x^2$ und $y = x^3$ soll eine Tabelle für ab $x = 0$ mit der Schrittweite $\Delta x = 0{,}5$ ausgegeben werden.

1. Schritt: den Rechner auf Funktionen vorbereiten

MODE Graph … Funktion (muss nicht jedesmal eingestellt werden)

2. Schritt: Evtl. früher eingegebene Funktionen löschen

◊ Y= F1 8 ENTER (Vorsicht!!)



3. Schritt: Gewünschte Werte für Start und Δx festlegen

◊ TblSet

(Auch diese Angaben müssen nicht jedes Mal eingegeben werden.)

4. Schritt: Tabelle ausgeben

1.Weg: vom HOME-Bildschirm aus

Tabelle x^2,x ENTER ⟶

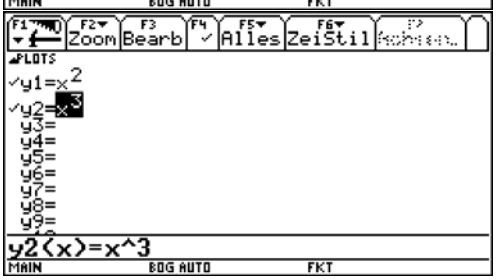
Mit Hilfe des Cursors können auch weitere Werte angezeigt werden. Nach Speicherung:

x^2 STO▸ f1(x) ENTER

geht auch: Tabelle f1(x) ENTER

Tabellen löschen: im HOME-Bildschirm mit LöGraph oder F4 5 ENTER

Um die zweite Funktion anzuzeigen macht man nun dasselbe mit x^3.



2.Weg: (auch für mehrere Funktionen geeignet)

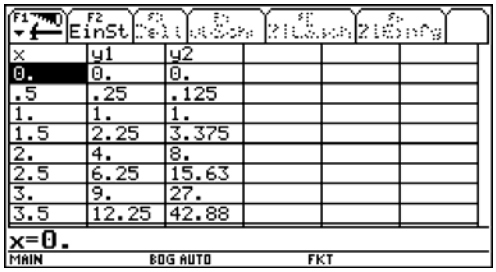
◊ Y= gib alle Funktionsgleichungen ein:

x^2 ENTER

x^3 ENTER

Funktionen, vor denen ein ✓ steht, werden berechnet. Das ✓ kann mit F4 gesetzt bzw. gelöscht werden.

◊ TABLE ⟶
Mit Hilfe des Cursors können auch weitere Werte angezeigt werden.
Tabellen löschen: ◊ Y= , dann Funktion mit Cursor markieren und mit F4 ✓ Löschen.

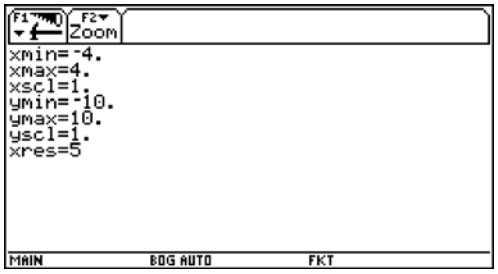


Zurück zum **HOME-Bildschirm** mit ◊ HOME Die Tabellen bleiben im Rechner erhalten und können mit ◊ TABLE wieder in die Anzeige zurückgeholt werden.

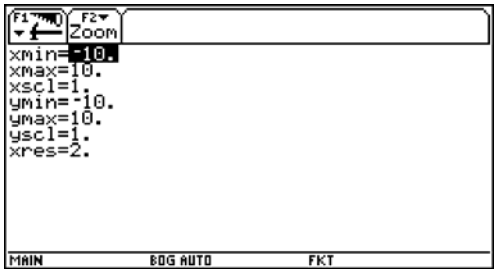
4.2 Graphen zeichnen

1) den Rechner auf Funktionen vorbereiten: MODE Graph … Funktion (ist i.a. eingestellt)
2) Ausschnitt und Genauigkeit der Darstellung einstellen:

entweder: problemangepasst (z.T. notwendig; dann sinnvoll, wenn der darzustellende Bereich etwa bekannt ist
◊ WINDOW



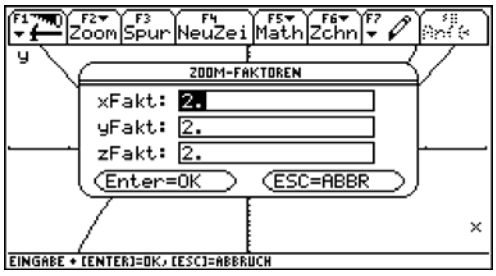
oder: Standardeistellung (Achsenkreuz mittig) (führt u.U. zu Problemen)
◊ WINDOW F2 6



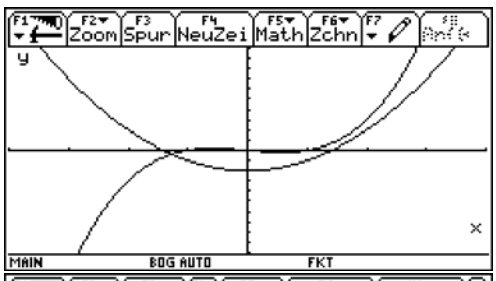
Wichtig : xres groß ⇒ schnelle, aber ungenaue Darstellung
klein ⇒ langsame, aber genauere Darstellung

Für einen erstenÜberblick empfiehlt es sich, xres ≈ 5 . . . 8 zu wählen.

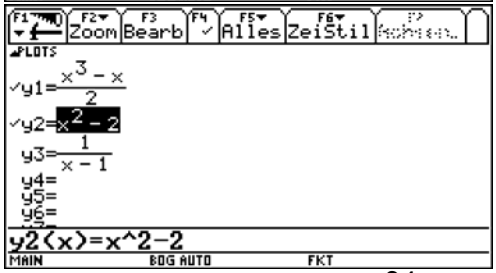
⇒ schneller Überblick ; dann ggf. Ausschnitt und xres korrigieren.
Das Zeichnen abbrechen: ON drücken (allgemein, wenn Vorgänge im TR zu lange dauern).
Die auf dem Rechner voreingestellten Werte können jederzeit mit ◊ WINDOW F2 6 wieder zurückgerufen werden. Die vorher eingestellten Werte können mit F2 B 1 zurückgerufen werden. Mit F2 B 2 bzw. 3 können Einstellungen gespeichert bzw. zurückgerufen werden. **xscl** bzw. **yscl** geben Skalierungen in x- bzw. y-Richtung an. **xres** ist ein Maß für die Auflösung: 1 ist die beste, 10 die schlechteste Auflösung. Ein großer Wert bedeutet also eine schnelle aber ungenauere Darstellung. Ein kleiner Wert eine langsame aber genauere Darstellung.
Achtung: Ist unter ♦ [GRAPH] F1 9 „Diskontinuitätsdetekt." eingestellt, so ist die Größe xres inaktiv. Es wird dann mit hoher Genauigkeit gearbeitet (Werkseinstellung!!!).



3) Es ist sinnvoll, alle **Zoomfaktoren** auf 2 zu setzen:
◊ GRAPH F2 C
voreingestellt sind 4; 4; 4. Die Zoomfaktoren werden bei Vergröß **(**ZoomIn) und Verklein **(**ZoomOut) benutzt.



Einen (oder mehrere) Graphen zeichnen:
1.Weg: graph(x^3-x)/2,x ENTER
oder graph {f1(x),f2(x)} ENTER ⟶
mit (x^3-x)/2 STO▸ f1(x) ENTER
und x^2-2 STO▸ f2(x) ENTER
2.Weg:
◊ Y= gib alle Funktionsgleichungen ein:
(x^3-x)/2 ENTER
Funktionen, vor denen ein ✓ steht, werden berechnet.
Das ✓ kann mit F4 gesetzt bzw. gelöscht werden.
◊ GRAPH ⟶ Bild wie bei 1.



Weitere Optionen zu ◊ GRAPH

Änderung des dargestellten Ausschnitts mit F2

1 : (**ZoomBox**) Zieht mit Hilfe des Cursors ein Fenster auf, in welchem dann die Funktion vergrößert dargestellt wird:

- Blinkendes Cursorfeld mit Hilfe des Cursors auf einen Eckpunkt des gewünschten Bildausschnitts lenken; diesen Punkt mit „ENTER“ bestätigen.
- Cursorfeld auf den diagonal gegenüberliegenden Eckpunkt des gewünschten Bildausschnitts lenken (hierbei wird ein rechteckiges Fenster aufgezogen); diesen Punkt wiederum mit „ENTER“ bestätigen. ⇒ Das vergrößerte Bild der Fkt erscheint.(Die Koordinaten der Eckpunkte werden jeweils am unteren Bildschirmrand angezeigt.)

Zurück zur vorhergehenden Darstellung mit **F 2 , B , 1 ,**
zur Standard – Einstellung mit **F 2 , 6**

2 : (**Vergröß, ZoomIn**) Legt einen **neuen Bildschirmmittelpunkt** fest und streckt gleichzeitig den Graphen um die bei den Zoomfaktoren angegebenen Werte (hier um 2). (Änderung der Zoomfaktoren mit F2 C) Cursor auf den gewünschten neuen Bildschirmmittelpunkt bringen, dann ENTER (neuer Mittelpunkt wird jeweils unten angezeigt) xmin, xmax, xscl, ymin, ymax, yscl werden durch die Zoomfaktoren **dividiert**

zurück: F2 B 1 ENTER (vorhergehende Darstellung, alter Mittelpunkt)

oder F2 3 ENTER (macht Streckung rückgängig behält aber den neuen Mittelpunkt bei, wenn der Cursor nicht bewegt wird).

zurück zur Standard-Einstellung: **F2 6 ENTER**

3 : **(Verklein, ZoomOut)** Legt einen **neuen Bildschirmmittelpunkt** fest und staucht gleichzeitig den Graphen um die beiden Zoomfaktoren angegebenen Werte (hier um 2). (Änderung der Zoomfaktoren mit F2 C)Cursor auf den gewünschten neuen Bildschirmmittelpunkt bringen, dann ENTER (neuer Mittelpunkt wird jeweils unten angezeigt) xmin, xmax, xscl, ymin, ymax, yscl werden mit den Zoomfaktoren **multipliziert**

zurück: F2 B 1 ENTER (vorhergehende Darstellung, alter Mittelpunkt)

oder F2 3 ENTER (macht Stauchung rückgängig behält aber den neuen Mittelpunkt bei, wenn der Cursor nicht bewegt wird)

2 und 3 machen sich gegenseitig rückgängig, wenn das Cursorfeld nicht bewegt wird. Sie können auch (jeweils für sich) mehrfach hintereinander angewandt werden.

zurück zur Standard-Einstellung: **F2 6 ENTER**

4 : (**ZoomDez**) („Dez“=dezimal) (ohne ENTER)

⇒ $\Delta x = \Delta y = 0{,}1$. Ursprung in der Mitte des Bildschirms.

Vorteile: Maßstab in x- und y-Richtung gleich (d.h. ein Kreis ist ein Kreis, keine Ellipse) Cursorschritte sind „glatte“ Dezimalstellen

Nachteile: u.U. zu grobe Darstellung

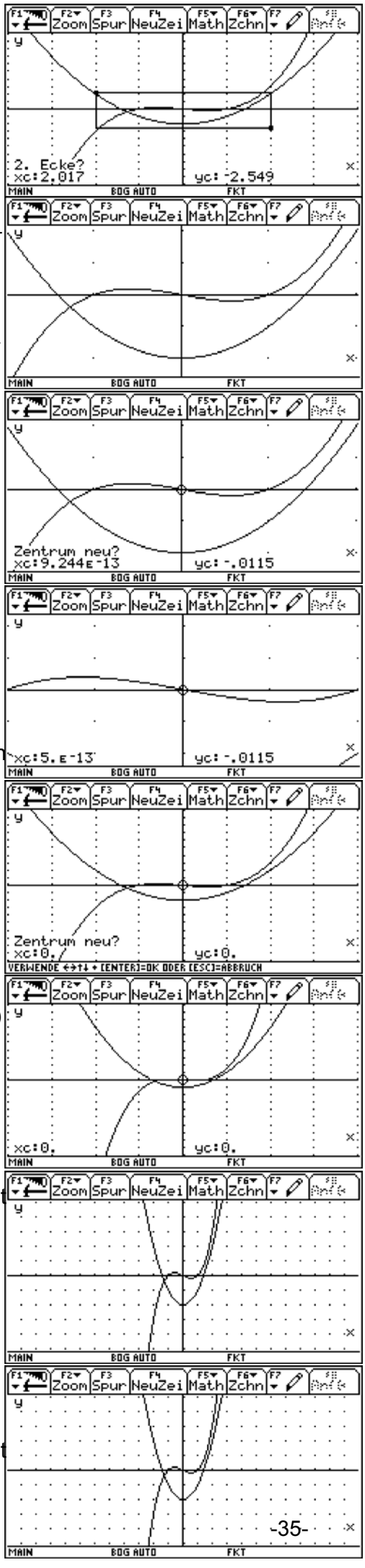
zurück: **F2 B 1 ENTER** (vorhergehende Darstellung)

zurück zur Standard-Einstellung: **F2 6 ENTER**

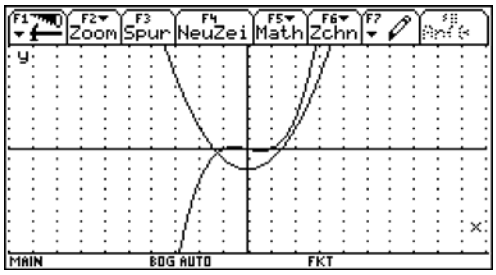
5 : (ZoomQuad) ⇒ Maßstab x-Achse = Maßstab y-Achse beibehalten werden: Wertebereich (ymin, ymax), Skalierung der Achsen (xscl, yscl)

geändert wird der Bereich auf der x-Achse

Vorteile: Maßstab in x- und y-Richtung gleich (d.h. ein Kreis ist ein Kreis, keine Ellipse)



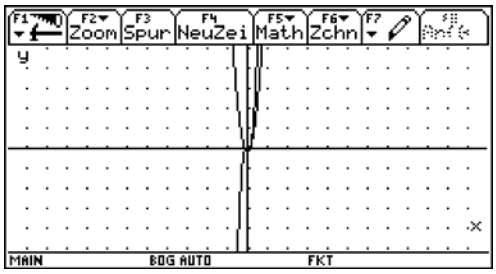
Nachteile: Bildschirm wird häufig nicht optimal ausgenutzt
zurück: F2 B 1 ENTER (vorhergehende Darstellung)
zurück zur Standard-Einstellung: F2 6 ENTER



6 : (ZoomStnd) Standardeinstellung
Achsenkreuz mittig;
Maßstab x-Achse ≠ Maßstab x-Achse
xmin = -10; xmax = 10; xscl = 1
ymin = -10; ymax = 10; yscl = 1; xres = 2
Cursor: $\Delta x \approx 0{,}084$; $\Delta y \approx 0{,}196$
zurück: F2 B 1 ENTER (vorhergehende Darstellung)

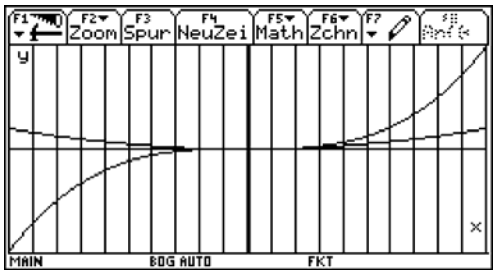
7 : (ZoomTrig) Vorteilhafte Einstellung für die Darstellung **trigonometrischer Funktionen.**
Achsenkreuz mittig; Maßstab x-Achse ≠ Maßstab x-Achse
xmin = -5π; xmax = 5π; xscl = $\pi/2$
ymin = -4; ymax = 4; yscl = 0,5
(xres sollte nicht zu groß eingestellt werden, da die Darstellung sonst zu ungenau wird). Cursor:
$\Delta x = \pi/24$; $\Delta y = \pi/40$
zurück: F2 B 1 ENTER (vorhergehende Darstellung); zurück zur Standard-Einstellung: F2 6 ENTER

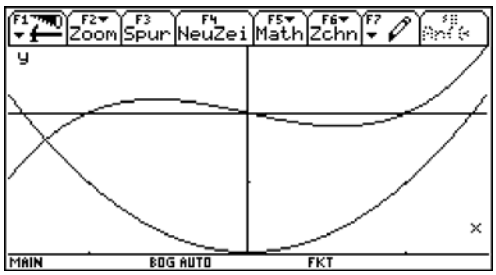
8 : (ZoomGzZ) sehr großer Darstellungsbereich ($-119 \le x \le 119$), und Wahl eines neuen Bildschirmmittelpunktes
xmin = -119; xmax = 119; xscl = 10
ymin = -51; ymax = 51; yscl = 10; xres = 2
Cursor: $\Delta x = \Delta y = 1$
Nachteil: i.A. viel zu grobe Darstellung
zurück: F2 B 1 ENTER (vorhergehende Darstellung)
zurück zur Standard-Einstellung: F2 6 ENTER



9 : (ZoomDat) Statistik: Erfasst alle vorher eingegebenen Statistik-Datenpunkte...

A : (ZoomPass) Anpassung an ymin und ymax
Der Graph wird derart gestreckt, dass ymin am unteren und ymax am oberen Bildschirmrand liegen. xmin, xmax, xscl, yscl, xres bleiben unverändert.
An dem nebenstehenden Beispiel sieht man, dass dies bei den ursprünglichen xmin, xmax Werten wenig Information bringt. Bei Werten xmin = -1,5 und xmax = 1,5 erhält man eine informativere Darstellung.
zurück: F2 B 1 ENTER (vorhergehende Darstellung)
zurück zur Standard-Einstellung: F2 6 ENTER





B 1 : (Speicher/ZoomVorh) Vorhergehende Einstellungen und Darstellung werden wieder hergestellt.

B 2 : (Speicher/ZoomSpch) Aktuelle Einstellungen von WINDOW werden gespeichert und können mit F2 B 3 wieder für die Graphik aktiviert werden.

B 3 : (Speicher/ZoomLad) Aktualisiert das WINDOW - Fenster mit den vorher unter F2 B 2 gespeicherten Daten

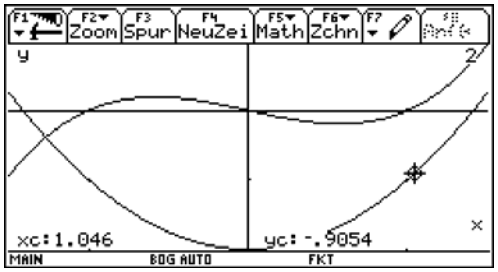
C : (DefFaktoren) Vergrößerungsfaktoren für F2 2 und F2 3 . Es können beliebige Zahlen ≥ 1 festgelegt werden.
Voreinstellung der Rechners: **Vorschlag**:

xFact: 4		xFact: 2
yFact: 4		yFact: 2
zFact: 4	←nur für 3D-Darstellung→	zFact: 2

Die geänderten Faktoren bleiben auch nach F2 6 (Standard-Einstellung) erhalten.

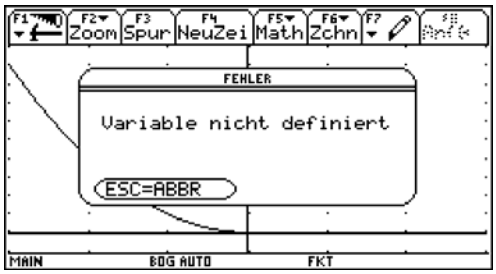
Funktionswerte ablesen:

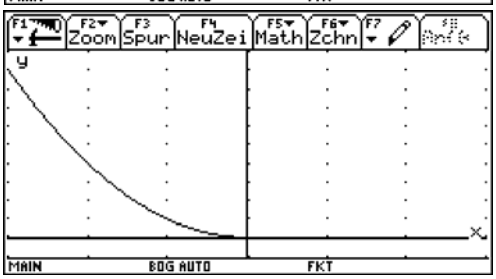
F3 : (Spur) Angabe der Koordinaten für den Kurvenpunkt, auf dem sich der Cursor befindet. Der Cursor bewegt sich auf dem Graphen, wenn die Cursor-Taste „rechts“ oder „links“ gedrückt wird. Hierbei werden die zugehörigen Koordinaten angezeigt. **Nachteil:** i.A. „krumme“ Werte für x und Δx.
Es können auch beliebige Werte für x direkt eingegeben werden. Der Cursor springt dann an diese Stelle der Kurve.
(Alternative: F5 1 s. später)
Bei **mehreren Graphen** auf dem Schirm: Durch Drücken der Cursor-Taste „oben“ oder „unten“ springt der Cursor von Kurve zu Kurve.



4.3 Abschnittsweise definierte Funktionen

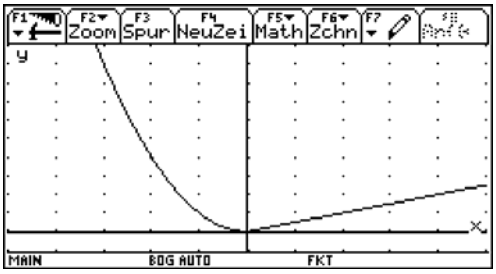
a) ein Intervall: Die Funktion y = x² (x ≤ 0) soll in ihrem Definitionsbereich dargestellt werden. (Tabelle entsprechend).
Eingabe:
Entweder im HOME-Editor
graph when (x<=0,x^2) ENTER →
(Bildschirm löschen ◊ HOME F4 5 ENTER)
graph when (x<=0,x^2,undef) ENTER →
oder:
when (x<=0,x^2,undef) STO▸ f(x) ENTER
und: graph f(x)
oder ◊ y=
y1(x)= when (x<=0,x^2) ENTER ◊ GRAPH
Fehlermeldung wie oben
y1(x)= when (x<=0,x^2,undef) ENTER ◊ GRAPH Bild wie oben.





b) zwei Intervalle: Die Funktion $y = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 0 \\ 0{,}5x & \text{für } x \text{ sonst} \end{cases}$ soll dargestellt werden.

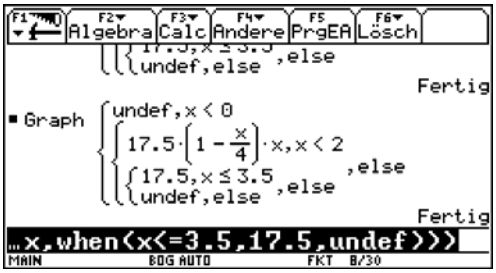
Eingabe:
Entweder im HOME-Editor
graph when (x<=0,x^2,.5x) ENTER →
oder:
when (x<=0,x^2,.5x) STO▸ f(x) ENTER
und: graph f(x) ENTER →
oder ◊ y=
y2(x)= when (x<=0,x^2,.5x) ENTER ◊ GRAPH Bild wie oben

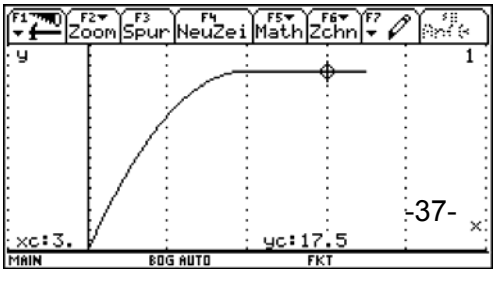


c) mehr als zwei Intervalle:

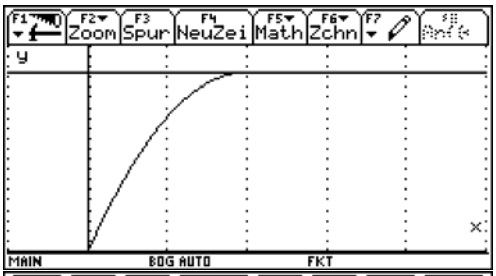
Die Funktion $y = \begin{cases} 17{,}5 \cdot (1 - x/4) \cdot x & \text{für } 0 \le x < 2 \\ 17{,}5 & \text{für } 2 \le x \le 3{,}5 \end{cases}$ soll dargestellt werden.

(Werkstoffgesetz Beton: Spannung in N/mm², Dehnung in ‰)
Eingabe:
Entweder im HOME-Editor
graph when (x<0,undef,when(x<2,17.5(1-x/4)x,
when(x<=3.5,17.5,undef))) ENTER →
oder: when (x<0,undef,when(x<2,17.5(1-x/4)x,
when(x<=3.5,17.5,undef))) STO▸ f2(x) ENTER
und: graph f2(x) ENTER →
oder ◊ y=





y2(x)= when (x<0,undef,when(x<2,17.5(1-x/4)x,
when(x<=3.5,17.5,undef)))
ENTER ◊ GRAPH ⟶ Bild wie oben



Alternative (übersichtlicher, aber Eingabe von mehreren (hier 2) Funktionen)

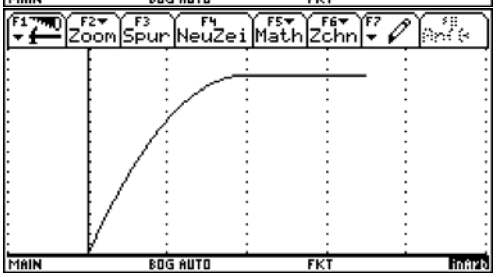
Im HOME-Editor:

17.5(1-x/4)x | x>=0 and x<2 STO▸ f3(x)
ENTER ⟶ Fertig

17.5 | x>=2 and x<=3.5 STO▸ f4(x)
ENTER ⟶ Fertig

graph {f3(x),f4(4)} ENTER ⟶

d.h. die Einschränkung bei f4 wird nicht beachtet.



Abhilfe:

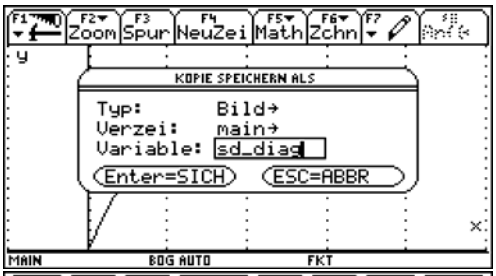
17.5 +x-x | x>=2 and x<=3.5 STO▸ f4(x)
ENTER ⟶ Fertig

Dann erhält man:

graph {f3(x),f4(4)} ENTER ⟶

(Rechner wird langsam!)

Diese Alternativmethode geht natürlich auch mit ◊ y= u.s.w. ⟶

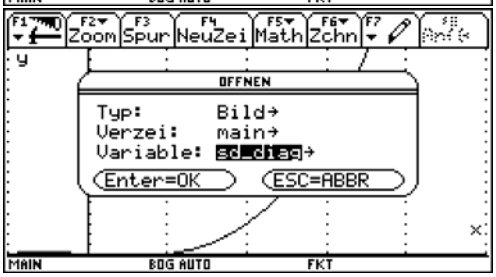


Den Graphikbildschirm speichern

Speichere den aktuell angezeigten Bildschirminhalt in der Variablen SD_Diag

F1 2 (Kopie speichern als...) ENTER ⟶

Wichtig: Als ***Bild*** speichern, nicht als ***GDB***



Einen gespeicherten Graphikbildschirm über die aktuelle Graphik legen

F1 1 (Öffnen..) ENTER ⟶

Wenn ausschließlich der Bildschirminhalt der Variablen sd_diag angezeigt werden soll, muss vorher der Graphikbildschirm gelöscht werden. (◊ HOME F4 5)

4.4 Kurvendiskussion

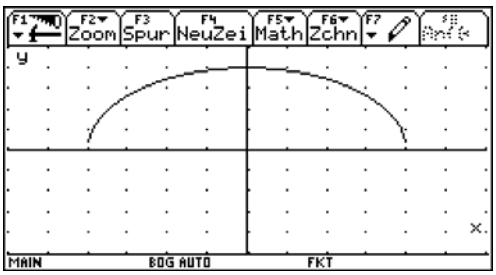
◊ GRAPH F5 (Math)

> ACHTUNG! Alle Ergebnisse können mit ♦ H in den Protokollbereich des Hauptbildschirms übertragen werden. Weiteres s. S. TR 4.11 (unten).

W A R N U N G

Ohne eine vorausgehende Untersuchung einer Funktion auf ihre wesentlichen Merkmale (Pole, A-symptoten, Def.-Bereich, Unstetigkeitsstellen usw.; vgl. Kap. Kurvendiskussion) kann das Bild einer Funktion auf dem TI-V (bzw. auch auf dem PC)

- falsch gedeutet werden
- unvollständig sein (z. B. liegen wesentliche Merkmale der Fkt außerhalb des Bildschirms)



Probieren Sie die folgenden sehr einfachen Beispiele aus:

Bsp. 1: Stellen Sie die Funktion $y = \sqrt{16 - x^2}$ dar.

Als Bild erhalten Sie im allg. eine halbe Ellipse. Diese Deutung ist in zweifacher Hinsicht falsch!

Bsp. 2: Stellen Sie die Funktion $y = 1/x$ dar.
(vorher xres = 4 in . ◇ WINDOWS einstellen). Was fällt Ihnen in der Umgebung von $x = 0$ auf ?

In der Klausur sind deshalb grundsätzlich analytische Voruntersuchungen anzustellen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist. Genaueres zum Thema Klausur / TR wird mit Ihnen rechtzeitig besprochen.

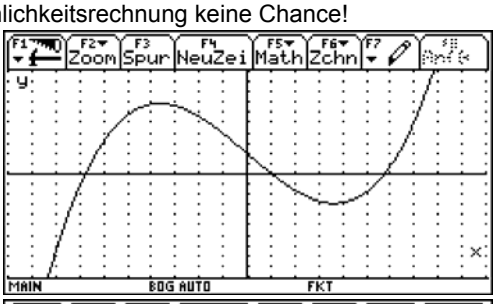
E M P F E H L U N G

Wegen der vielen Fehlermöglichkeiten, die TR und PC bieten *), sollten für einen Ingenieur stets der gesunde Menschenverstand, die Überschlagsrechnung und die anschauliche Kontrolle die letzte Instanz bei der Überprüfung und der Einschätzung von Berechnungsergebnissen sein.

*) Merke: Es gibt unendlich viele Fehlermöglichkeiten, meistens aber nur sehr wenige richtige Lösungen! Wenn Sie ein Lotteriespiel daraus machen, haben Sie nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung keine Chance!

Beispiel: für die Funktion y = x^3/20 - 2x + 2 sollen die wesentlichen Merkmale ermittelt werden.

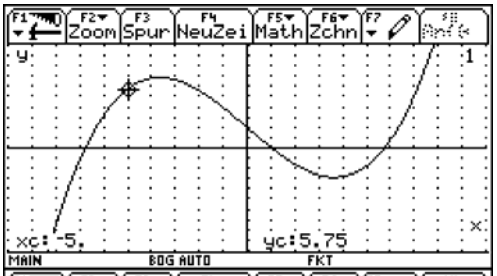
Vorbereitung: ◊ y= y1(x) = x^3/20 - 2x + 2
F2 6 (ZoomStd) (oder ◊ GRAPH) →



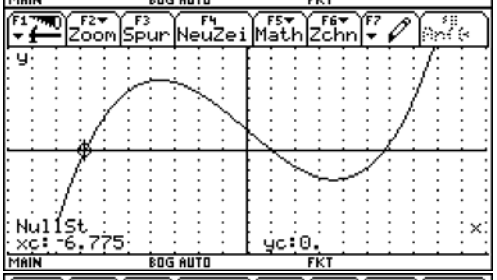
Alle Optionen zu ◊ GRAPH F5 (Math)

Achtung: Im Folgenden müssen alle Eingabewerte im Fensterbereich liegen! Sonst Fehlermeldung.

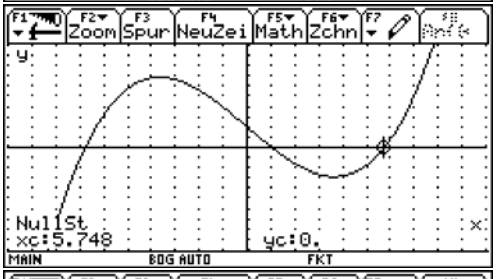
1 : (FktWert) berechnet zu vorgegebenen x-Werten die zugehörigen **y-Werte**: Gewünschten x-Wert mit ENTER eingeben, dann wird der zugehörige y-Wert angezeigt und der Cursor springt auf den Punkt P(x; y) der Kurve.



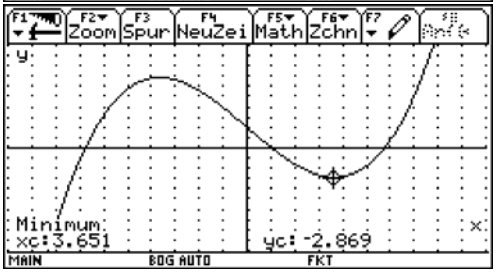
2 : (NullSt) ermittelt **eine Nullstelle** in einem vorzugebenden Intervall. Bei **Unter Grenze** : -8 und **Obere Grenze** : 7 ergibt sich:



Oder: Mit dem Cursor einen Punkt etwas links von der gesuchten Nullstelle mit ENTER als **Unter Grenze** und einen Punkt etwas rechts von der gesuchten Nullstelle mit ENTER als **Obere Grenze** eingeben:

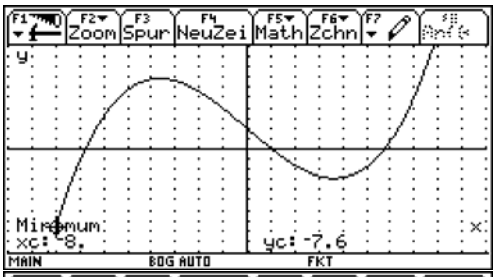


3 : (Minimum) ermittelt die Koordinaten **eines Minimums** in einem vorzugebenden Intervall. Bei **Unter Grenze** : -8 und **Obere Grenze** : 7 ergibt sich:

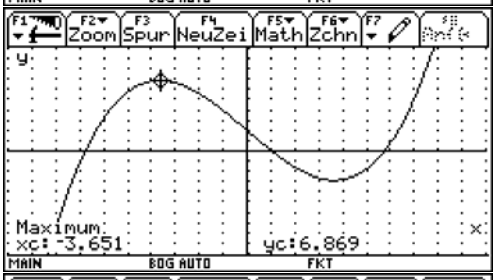


Oder: Mit dem Cursor einen Punkt etwas links von dem gesuchten Minimum mit ENTER als **Unter Grenze** und einen Punkt etwas rechts von dem gesuchten Minimum mit ENTER als **Obere Grenze** eingeben:

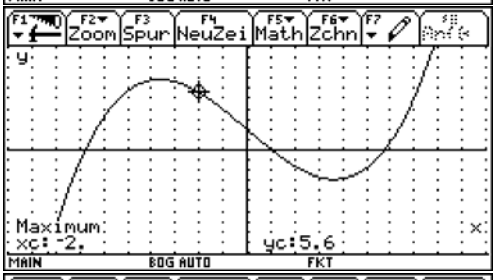
Achtung: Liegt kein relatives Minimum im vorgegebenen Intervall, so wird das absolute Minimum im Intervall angezeigt:
Beispiel I=[-8; 1]



4 : (Maximum) ermittelt die Koordinaten **eines Maximums** in einem vorzugebenden Intervall. Bei **Unter Grenze** : -8 und **Obere Grenze** : 7 ergibt sich:
Oder: Mit dem Cursor einen Punkt etwas links von dem gesuchten Maximum mit ENTER als **Unter Grenze** und einen Punkt etwas rechts von dem gesuchten Maximum mit ENTER als **Obere Grenze** eingeben:

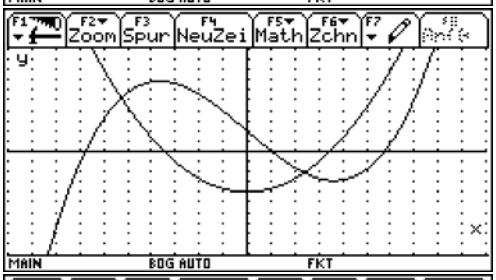


Achtung: Liegt kein relatives Maximum im vorgegebenen Intervall, so wird das absolute Maximum im Intervall angezeigt:
Beispiel I=[-2; 7.5] **falsches Ergebnis!!!**

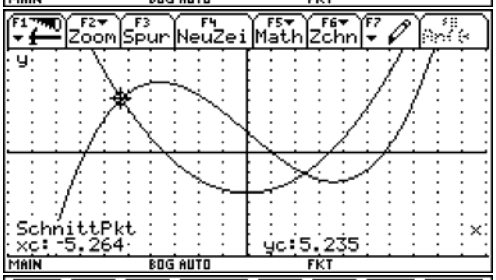


5 : (SchnittPkt) ermittelt **einen Schnittpunkt** zweier Kurven in einem vorzugebenden Intervall.

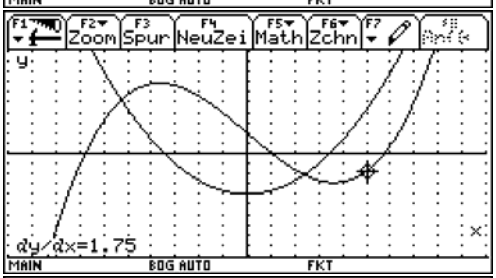
Beispiel: ◊ y= y1(x) = x^3/20 - 2x + 2 (bereits im Rechner)
y2(x) = x^2/3 – 4 (neu eingeben)
◊ GRAPH Bei F5 5 müssen zuerst die beiden Kurven ausgewählt werden. Dies ist bei genau zwei Kurven auf dem Bildschirm eigentlich überflüssig; bei mehr als zwei Kurven aber notwendig. Bei mehr als zwei Kurven kann man durch Cursor „oben“ bzw. „unten“ die Kurven auswählen. Bei **Unter Grenze** : -6 und **Obere Grenze** : 5 ergibt sich:



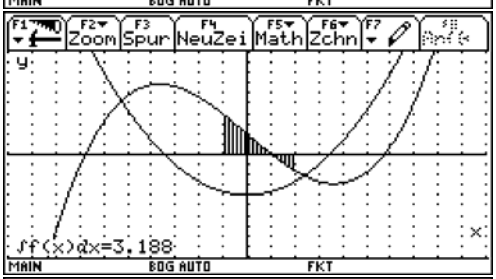
6 : (Ableitungen) berechnet den Wert der **Ableitung** in einem Punkt. Bei mehreren Kurven kann man durch Cursor „oben“ bzw. „unten“ die Kurve auswählen. Den gewünschten x-Wert entweder direkt über Tastatur oder mit Hilfe des Cursors und ENTER eingeben. Für xc = 5 ergibt sich bei y1:



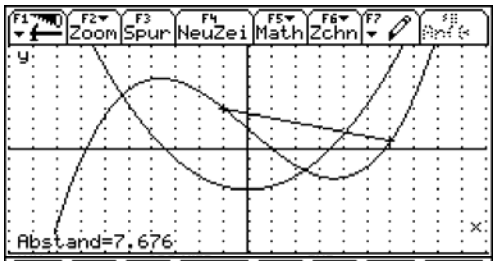
7 : ($\int f(x)dx$ **)** berechnet den Wert des **bestimmten Integrals** in einem vorzugebenden Intervall. Bei mehreren Kurven kann man durch Cursor „oben“ bzw. „unten“ die Kurve auswählen. Die Intervallgrenzen können entweder direkt über Tastatur oder mit Hilfe des Cursors und ENTER eingegeben werden. Für das Intervall I = [-1; 2] ergibt sich das angebenen Bild. Vor Neuberechnung sollte man mit F4 (NeuZei) die Schraffur löschen.



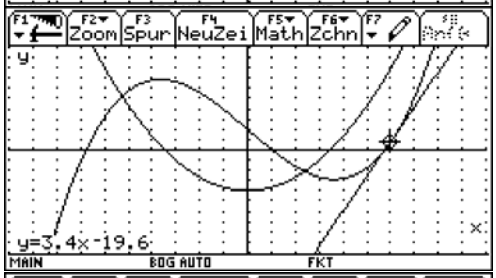
8 : (WendePkt) ermittelt die Koordinaten eines **Wendepunktes** in einem vorzugebenden Intervall. Bei mehreren Kurven kann man durch Cursor „oben“ bzw. „unten“ die Kurve auswählen. Die Intervallgrenzen können entweder direkt über Tastatur oder mit Hilfe des Cursors und ENTER eingegeben werden. Für das Intervall I = [-4; 4] ergibt sich:



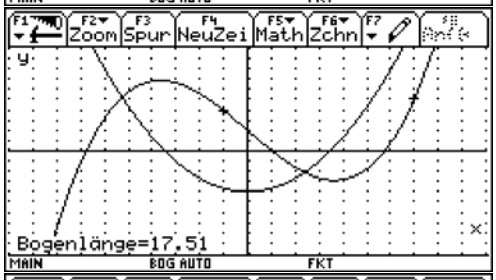
9 : (Abstand) berechnet den **geradlinigen Abstand** zweier anzugebender Punkte auf einer Kurve. Bei mehreren Kurven kann man durch Cursor „oben“ bzw. „unten“ die Kurve auswählen. Die Punkte können entweder direkt über Tastatur oder mit Hilfe des Cursors und ENTER eingegeben werden. Für die Punkte P1(-1; ...) und P2(6;...) ergibt sich:
Vor Neuberechnung sollte man mit F4 (NeuZei) die Verbindungsgerade löschen.



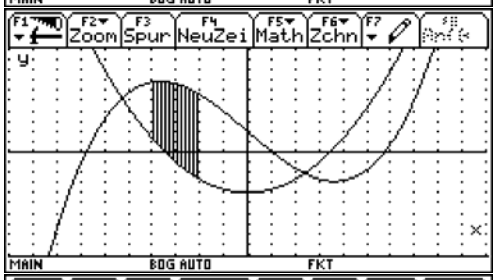
A : (Tangente) ermittelt im angegebenen Punkt die **Tangente**. Bei mehreren Kurven kann man durch Cursor „oben“ bzw. „unten“ die Kurve auswählen. Der Punkt kann entweder direkt über Tastatur oder mit Hilfe des Cursors und ENTER eingegeben werden. Für den Punkt P(6; ...) ergibt sich :
Vor Neuberechnung sollte man mit F4 (NeuZei) die Tangente löschen.



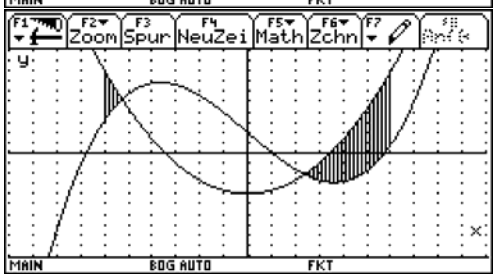
B : (Bogenlänge) ermittelt die Länge der Kurve zwischen zwei anzugebenden Punkten. Bei mehreren Kurven kann man durch Cursor „oben“ bzw. „unten“ die Kurve auswählen. Die Punkte können entweder direkt über Tastatur oder mit Hilfe des Cursors und ENTER eingegeben werden. Für die Punkte P1(-1; ...) und P2(7;...) ergibt sich :



C : (Schraff) schraffiert ausgewählte Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse bzw. zwischen zwei Kurven. Man wählt zunächst aus, oberhalb welcher Kurve, dann unterhalb welcher anderen Kurve (Cursor „oben“ bzw. „unten“ betätigen) schraffiert werden soll. Danach wählt man die Schraffurgrenzen.
(hier –4 und –1)



Vorsicht: Der Rechner nimmt die Angabe „oberhalb“ bzw. „unterhalb“ ganz genau. Schraffur von -6 bis 6 ergibt daher:



Vor Neuberechnung sollte man mit F4 (NeuZei) die Schraffur löschen.

Übertragung der Ergebnisse aus dem Graphik- in den Protokollbereich des Hauptbildschirms:

♦ **H** ⇒ Meldung unten auf dem Graphik-Bildschirm

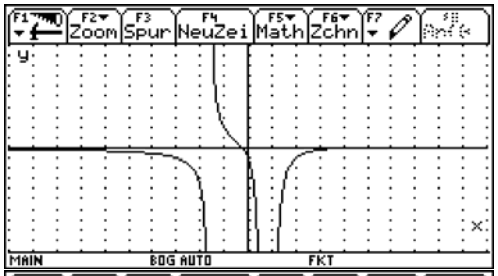
„ DATEN IN HAUPTBILDSCHIRM GESCHRIEBEN “

Es können auch mehrere Ergebnisse übertragen werden (z. B. *x*-, *y*-Werte Min, Max, WP, NSt **. . .**)

(ggf. mit ♦ **Q** zurück in den Hauptbildschirm ; dort stehen die übertragenen Daten als einzeilige Matrix [x_i y_i] unten rechts im Protokollbereich und können weiterverarbeitet werden.)

4.5 Beispiel: Diskussion einer echt gebrochen rationalen Funktion

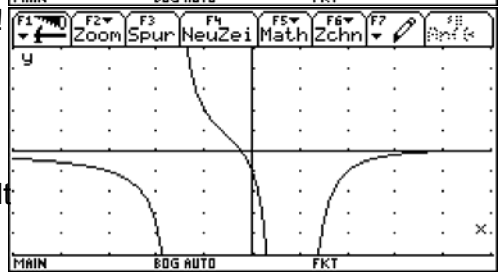
Die Funktion $y = \dfrac{x^2 - 4x - 1}{x^3 - 2x + 1}$ soll diskutiert werden.



Funktion eingeben: ♦ [y =] ,

y1(x) = (x ^ 2 – 4 x – 1) / (x ^ 3 – 2 x + 1) [ENTER]

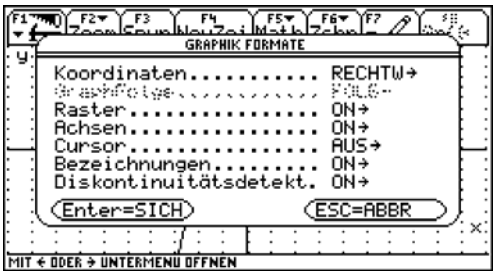
Funktion darstellen: ♦ [GRAPH] mit (F2) [6:] (Zoom Stnd) ⇒
sehr grobes Bild der Funktion, praktisch nicht brauchbar!



Ausschnitt anpassen: ♦ [WINDOWS] ,
dann xmin = ymin = -5 , xmax = ymax = 5 ,xres = 5 eingeben.
Funktion neu zeichnen: ♦ [GRAPH] ⇒
besseres Bild der Funktion, aber 1 Kurvenast (zwischen 2 Polen) fehlt

FAZIT: Eine „Automatik" für eine vollständige, erkennbare Darstellung einer Funktion kann kein Rechner bieten. Es ist immer zweckmäßig, die wesentlichen Merkmale durch eigene Überlegungen im Dialog mit dem Rechner zu ermitteln.

Im vorliegenden Fall kann es z. B. zweckmäßig sein, Zähler und Nenner getrennt zu untersuchen.
Die Ermittlung der Nullstellen des Zählers (= NSt der Funktion) und der Nullstellen des Nenners (= Pole der Funktion) erfordert weniger Rechenzeit, als wenn jeweils die gesamte Funktion untersucht wird. Auch ist die Wahrscheinlichkeit deutlich geringer, dass z. B. bei der NSt-Suche keine Lösung gefunden wird.

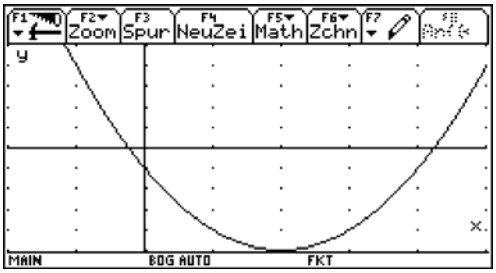


Achtung: Um Pole (Diskontinuitäten) besser zu erkennen, sollte unter ♦ [GRAPH] [F1] [9] „Diskontinuitätsdetekt" eingeschaltet werden.
Nachteil: xres wird dann inaktiv und die „Rechnungen" dauern länger.

Getrennte Untersuchung von Zähler und Nenner

Funktion eingeben: ♦ [y =] , y2(x) = ***x ^ 2 – 4 x – 1*** [ENTER]
y3(x) = ***x ^ 3 – 2 x + 1*** [ENTER]

Funktionen y1 und y3 mit (F4) deaktivieren



Untersuchung des Zählers Achsenabschnitt: x = 0 ⇒ y = -1

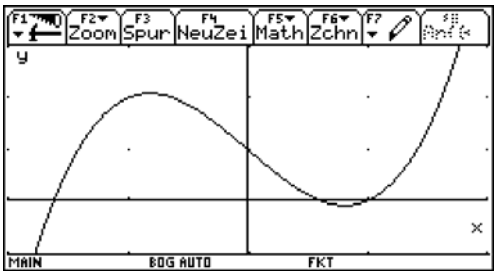
Zähler darstellen: ♦ [GRAPH]

⇒ Bild des Zählers y2(x) erscheint.
[Kontr.: Die Parabel ist nach oben geöffnet, da das Vorzeichen vor x^2 positiv ist.]

2 Nullstellen: mit (F5) [2:] nacheinander ermitteln ⇒ x_{01} = - 0,236 , x_{02} = 4,24

Weitere Merkmale des Zählers brauchen nicht ermittelt zu werden.

Untersuchung des Nenners Achsenabschnitt: x = 0 ⇒ y = +1



♦ [y =] , mit (F4) Funktionen y2 und y3 deaktivieren

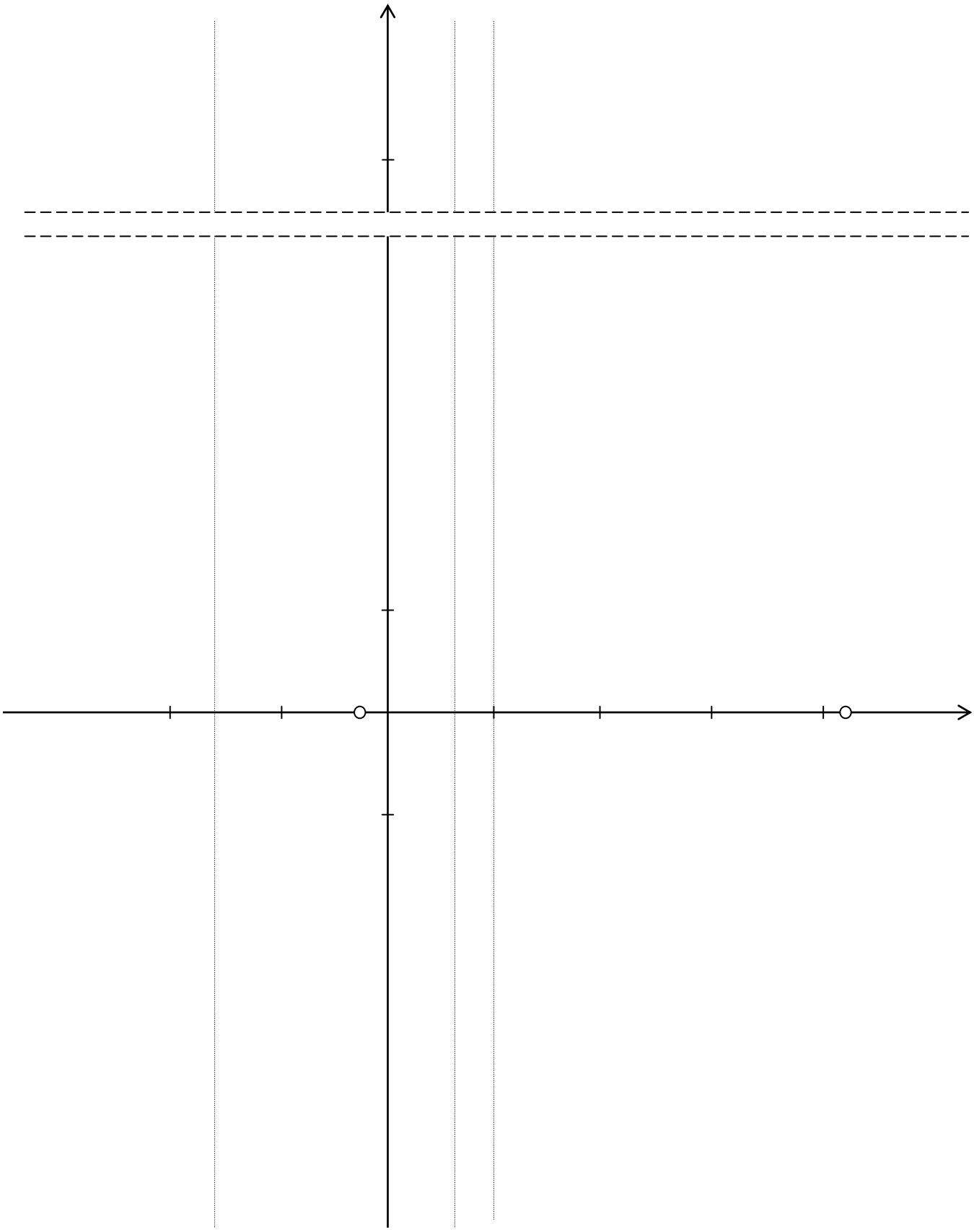
Nenner darstellen: ♦ [GRAPH]

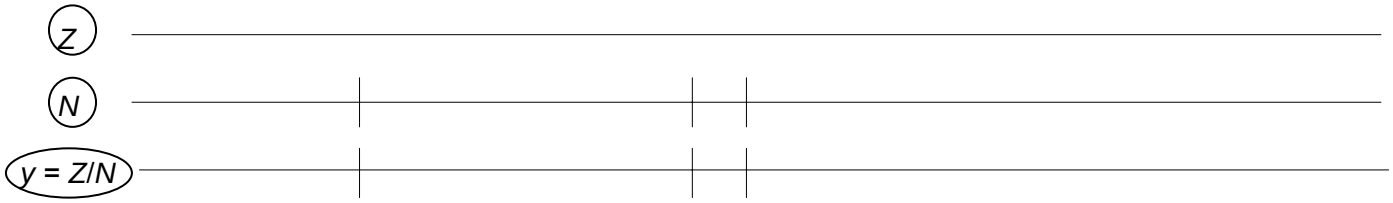
⇒ Bild des Nenners y3(x) erscheint.
[Kontr.: $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$ und $x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty$]

3 Nullstellen: mit (F5) [2:] nacheinander ermitteln ⇒ x_{03} = - 1,62 , x_{04} = 0,62 , x_{05} = 1
(3 EINfache NSt ⇒ Pole MIT Vz-Wechsel)

Weitere Merkmale des Nenners brauchen nicht ermittelt zu werden.

„Graphische Division“ y = Z / N :





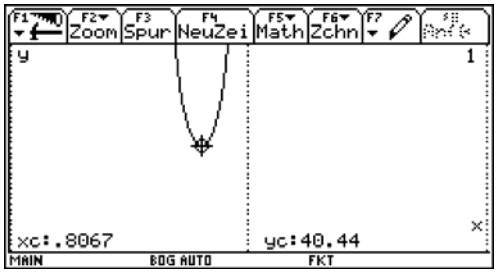
Restliche Merkmale der Funktion $y = \dfrac{x^2 - 4x - 1}{x^3 - 2x + 1} = \dfrac{y2}{y3} = \dfrac{Z}{N}$

- **Wo liegt der „verlorene Ast" zwischen den Polen $x_{p1} = 0{,}62$ und $x_{p2} = 1$?**

  Da Zähler und Nenner in diesem Intervall negativ sind, ist y als Quotient negativer Werte positiv.
  In der Mitte des Intervalls liest man aus der Skizze auf der vorigen Seite ab:

  $Z / N \approx 3 / 0{,}1 = 30 \quad \Rightarrow y \geq \approx 30$

  Mit (F 4) Funktionen y2 und y3 deaktivieren, y1 aktivieren



  Ausschnitt anpassen: ♦ WINDOWS ,

  xmin = 0 , xmax = 2
  ymin = 20 , ymax = 60

  Ausschnitt darstellen: ♦ GRAPH ⇒ Kurvenast zwischen den Polen

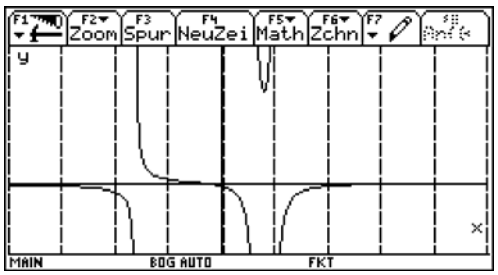
(Anm.: Eine „graphische Division" von Zähler und Nenner direkt in der Skizze auf der vorigen Seite ist weniger aufwendig und gleichzeitig übersichtlicher!)

Mit der Information, die man nun hat, kann man die Funktion etwas besser darstellen:

Ausschnitt anpassen: ♦ WINDOWS ,

xmin = -4 , xmax = 5
ymin = -30 , ymax = 60

Ausschnitt darstellen: ♦ GRAPH ⇒



- **Extrema und Wendepunkte**

  Es ist zweckmäßig, die einzelnen Intervalle zwischen den Polen nacheinander gut sichtbar auf dem Bildschirm darzustellen und die Intervalle für sich auf alle interessierenden Merkmale zu untersuchen.

  Aus der „graphischen Division" von Zähler und Nenner direkt in der Skizze auf der vorigen Seite sowie aus der Darstellung der einzelnen Intervalle auf dem Bildschirm ist (hier) zu erkennen, wo es Minima, Maxima und Wendepunkte geben kann:

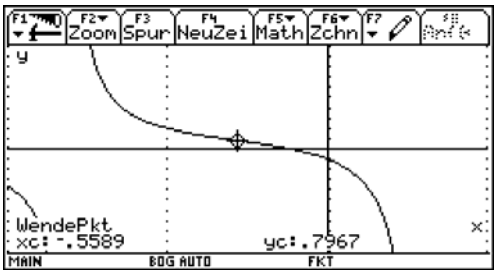
  $-\infty < x < -1{,}62$: keine Extrema und WP zu erwarten

  $-1{,}62 < x < 0{,}618$: ein WP zu erwarten, jedoch keine Extrema

  Ausschnitt anpassen: ♦ WINDOWS ,

  xmin = - 2 , xmax = 1
  ymin = -10 , ymax = 10 , xres = 5

  Funktion darstellen: ♦ GRAPH ⇒



  Wendepunkt mit (F 5) 8: , untere Grenze = -1.6 ,

  obere Grenze = 0.6 ermitteln ⇒ $x_{w1} = -0.5589$ $y_{w1} = 0.7967$

  (Anm.: Überprüft man „sicherheitshalber" mit **F 5 , 3** bzw. **4** , ob Extrema in diesem Intervall vorliegen, so erhält man als Maximum bzw. als Minimum den maximalen bzw. minimalen Funktionswert an der unteren bzw. oberen Grenze ⇒ *keine* Extrema !)

  $0{,}618 < x < 1$: ein Minimum zu erwarten, jedoch kein Maximum und kein WP

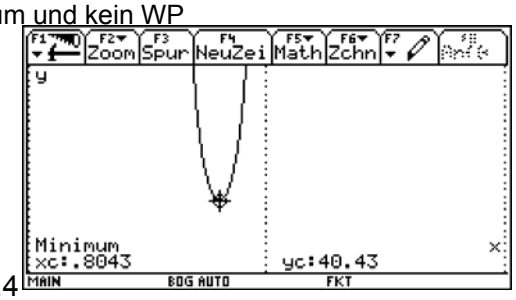
  Ausschnitt anpassen: ♦ WINDOWS ,

  xmin = 0 , xmax = 2
  ymin = 30 , ymax = 60 , xres = 5

  Funktion darstellen: ♦ GRAPH ⇒

  Minimum mit (F 5) 3: untere Grenze = 0.62 ,

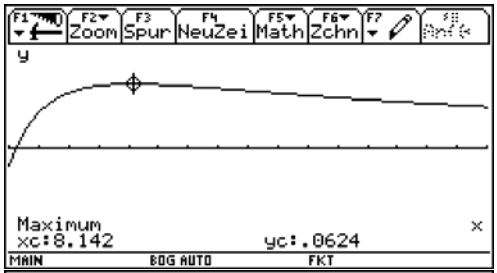
  obere Grenze = 0.98 ermitteln: ⇒ $x_{min\,1} = 0.804$ $y_{min\,1} = 40.4$



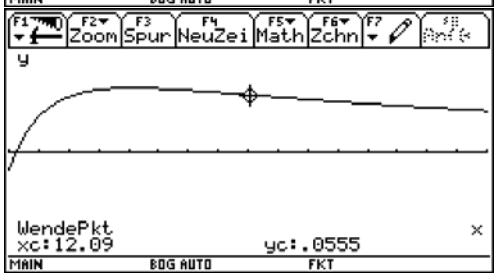
$1 < x < \infty$: ein Maximum und ein WP zu erwarten, jedoch kein Minimum

Ausschnitt anpassen: ♦ WINDOWS ,
xmin = 4 , xmax = 20
ymin = -0.1 , ymax = 0.1 , xres = 5

Funktion darstellen: ♦ GRAPH ⇒



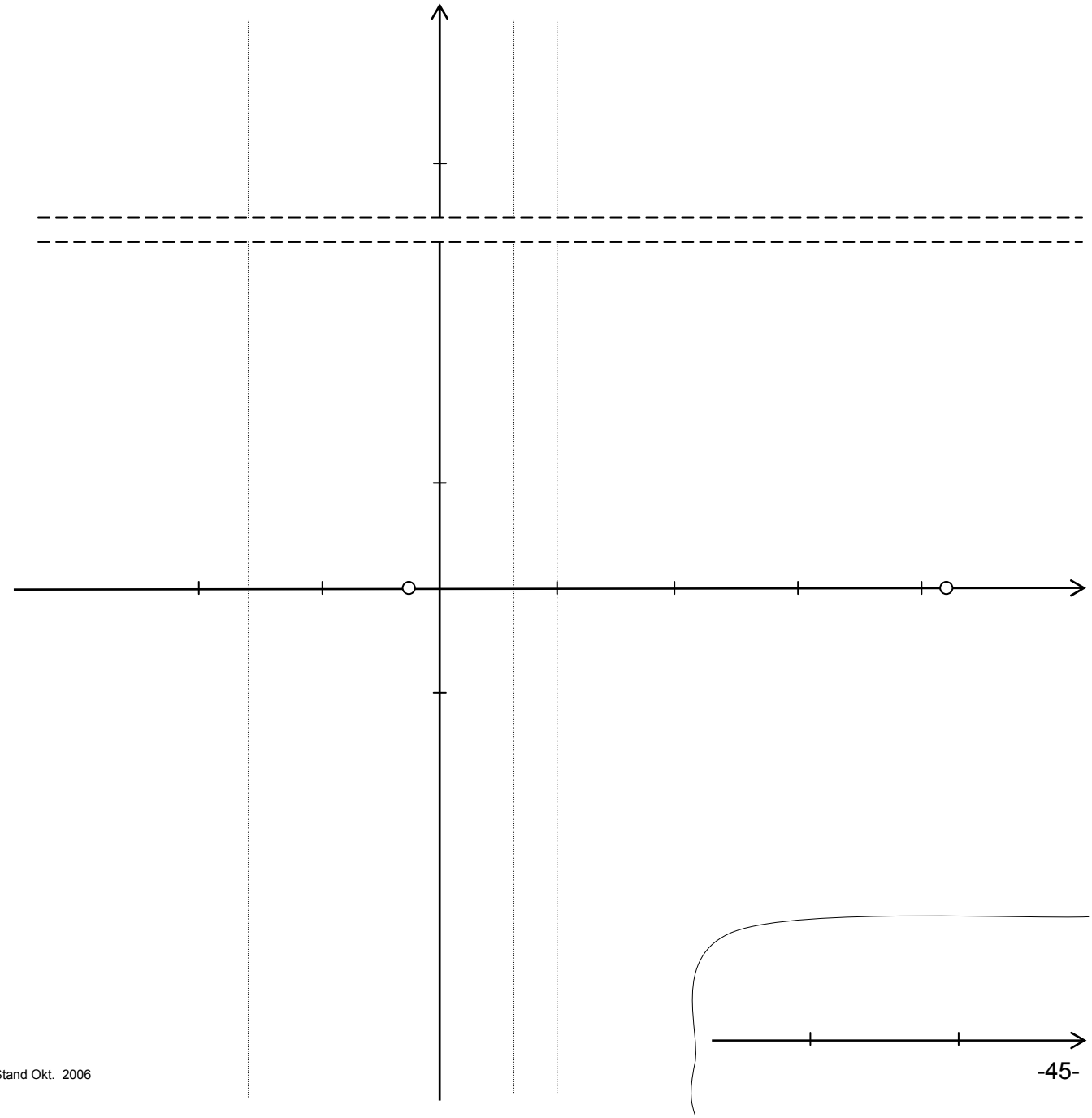
Maximum mit (F 5) 4: ,
untere Grenze = 4 , obere Grenze = 10 ermitteln
⇒ $x_{max\,1} = 8.14$ $y_{max\,1} = 0.062$



Wendepunkt mit (F 5) 8: ,
untere Grenze = 8 , obere Grenze = 20 ermitteln
⇒ $x_{w\,2} = 12.1$ $y_{w\,2} = 0.0555$

Wegen der kleinen Funktionswerte bei $x_{max\,1}$ und $x_{w\,2}$ sind diese Punkte in einer einzigen Darstellung nicht zu erkennen. Es ist bei diesem Beispiel also notwendig, mehrere Ausschnitte mit unterschiedlichen Skalierungen zu wählen, um die charakteristischen Eigenschaften der Funktion anschaulich darstellen zu können.

Bild der Funktion



Es ist bei dem obigen Beispiel auch sinnvoll, das Verhalten der Kurve an den „Bereichsgrenzen“ zu untersuchen. Dies ist mit dem ***limes*** – Befehl (oder [F3] [3]) möglich. Eine ausführlichere Behandlung kommt in 5.2.

limes(y1(x),x,∞) [ENTER] ⟶ 0

limes (y1(x),x,-∞) [ENTER] ⟶ 0

limes (y1(x),x,1,1) [ENTER] ⟶ -∞
(Grenzwert zum Punkt 1 von „rechts“)

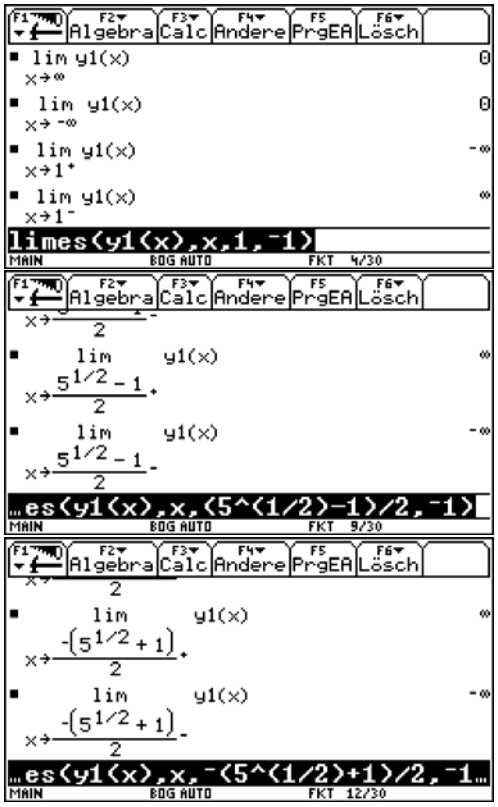
limes (y1(x),x,1,-1) [ENTER] ⟶ ∞
(Grenzwert zum Punkt 1 von „links“)

limes (y1(x),x,$\left(\sqrt{5}-1\right)/2$,1) [ENTER] ⟶ ∞
(Grenzwert von „rechts“)

limes (y1(x),x, $\left(\sqrt{5}-1\right)/2$,-1) [ENTER] ⟶ -∞
(Grenzwert von „links“)

limes (y1(x),x,$-\left(\sqrt{5}+1\right)/2$,1) [ENTER] ⟶ ∞
(Grenzwert von „rechts“)

limes (y1(x),x, $-\left(\sqrt{5}+1\right)/2$,-1) [ENTER] ⟶ -∞
(Grenzwert von „links“)



Vorsicht bei der Verwendung von ***limes***, wenn der Pol nicht exakt bekannt ist.

5 Differenzialrechnung

5.1 Differenzieren

ACHTUNG ! Speicher für x muss leer sein! Ggf. löschen : [2nd] [VAR-LINK] , [F1] [4]
(Sonst wird die Ableitung für den gespeicherten Wert von x ausgewertet.)

- **Erste Ableitung** Einfaches Beispiel : $y = x^2$; $y' = ?$

  [d] ***(x*** [^] ***2 , x)*** [ENTER] ⇒ 2 · x
  ↑ [2nd] [8]

  Häufig ist es zweckmäßig, die Funktion und ihre Ableitung(en) zu speichern, z. B. als f0(x), f1(x), f2(x) usw. oder als y10(x), y11(x), y12(x) usw. (vgl. Kap. TR 4.1)

  Beispiel : gesucht sind die Ableitung(en) von $y = \sin x - x \cos x$

  – Fkt speichern: ***sin (x) – x * cos (x)*** [STO▸] ***f0(x)*** [ENTER]

  – ableiten: [d] ***f0(x) , x)*** ([ENTER] , wenn Abl. nicht gespeichert wird)

  – Ableitung speichern:
  [z. B. unter ***f1(x)***] ***. . .*** [STO▸] ***f1(x)*** [ENTER]

- **<u>Zweite Ableitung und höhere Ableitungen</u>**

  Einfaches Beispiel : $y = x^3$; $y'' = ?$

  – ENTWEDER direkt die zweite Ableitung bilden:

  [d] (x [^] 3 , x , 2) ENTER ⇒ 6 · x

  [2nd] [8] — zweite Ableitung

  – ODER von der gespeicherten Funktion f0(x) = x³ direkt die Ableitung bilden:

  [d] (f0(x) , x , 2) ENTER ⇒ 6 · x

  [2nd] [8] — zweite Ableitung

  – ODER von der gespeicherten Funktion f0(x) = x³ die Ableitungen bilden und speichern:

  <u>erste</u> Ableitung:

  [d] (f0(x) , x) STO▸ f1(x) ENTER ⇒ Fertig

  oder, wenn das Ergebnis sofort angezeigt werden soll:

  [d] (f0(x) , x) ENTER ⇒ 3 · x²
  anschließend: STO▸ f1(x) ENTER ⇒ Fertig

  <u>zweite</u> Ableitung:

  [d] (f1(x) , x) STO▸ f2(x) ENTER ⇒ Fertig

  oder, wenn das Ergebnis sofort angezeigt werden soll:

  [d] (f1(x) , x) ENTER ⇒ 6 · x
  anschließend: STO▸ f2(x) ENTER ⇒ Fertig

  usw.

  (Statt f0(x), f1(x), f2(x) usw. können auch die vordefinierten Funktionen, z. B. y10(x), y11(x), y12(x) usw. verwendet werden; zweckmäßig: Ableitungen fortlaufend nummerieren!)

- **<u>Wert einer Ableitung</u>** an einer bestimmten Stelle $x = x_1$

  Beispiel : geg. ist die Funktion $y = \sin x - x \cos x$, ges.: $y'(x = 1{,}1)$

  RAD !

  – entweder direkt : [2nd] [K]

  [d] (sin (x) – x * cos (x) , x) | x = 1.1 ENTER ⇒ .980

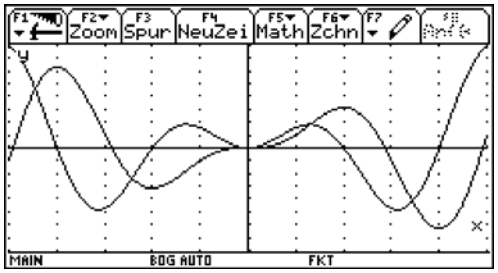
  – oder, wenn y' bereits als f1(x) gespeichert ist : f1(1.1) ENTER ⇒ .980

  (– oder im Graphik - Modus mit [F5] [6] , s. Kap. TR 4.4.1)

  Die Graphen von Funktionen und ihren Ableitungen lassen sich auch gut gemeinsam anzeigen:

  graph{f0(x),f1(x)} ENTER ⟶.

  (xmin = -5/2π; xmax = 5/2π; xscl = π/2;
  ymin = -8; ymax = 8; yscl = 1)



- **Einige Besonderheiten**

  Der TI-V formt in einigen Fällen Terme in „überraschender“ Weise um (gilt entsprechend auch außerhalb der Differenzialrechnung). Diese Umformungen hängen von der Voreinstellung „EXAKT“ / „AUTO“ / „APPROX“ ab.

  Beispiel 1: $y = \sqrt{\ln(5x)}$; $y' = ?$

  Handrechnung (Kettenregel) $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{\frac{1}{5x} \cdot 5}{2\sqrt{\ln(5x)}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(5x)}}$

  TI-V / EXAKT, AUTO $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(5x)}}$ (wie Handrechnung)

  mit ♦ ENTER

  TI-V / AUTO, APPROX $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x) + 1.609}}$

  (Umformung: ln (5 *x*) = ln (*x*) + ln (5) = ln (*x*) + 1.609 ; also gleiche Ergebnisse)

  Beispiel 2: $y = \sqrt{e^{3x}}$; $y' = ?$

  Handrechnung (Kettenregel) $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{3e^{3x}}{2\sqrt{e^{3x}}} = 1{,}5\, e^{3x - 3x/2} = 1{,}5\sqrt{e^{3x}}$

  TI-V / EXAKT, AUTO $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{3 \cdot e^{\frac{3x}{2}}}{2}$

  mit ♦ ENTER

  TI-V / AUTO, APPROX $\Rightarrow$ $y' = 1{,}50 \cdot e^{\frac{3x}{2}}$

  FAZIT :

  Für „allgemeine” Umformungen, Differentiationen, Integrationen usw. führen die Voreinstellungen „EXAKT, AUTO“ häufig zu klareren Ergebnissen (Bsp. 1). Alle 3 möglichen Voreinstellungen liefern aber nicht immer Ergebnisse in der Form, die handschriftlich bevorzugt wird (Bsp. 2).
  Manche Ergebnisse kann man nur deuten, wenn man in den Grundlagen des Rechnens und der Mathematik „fit“ ist.

5.2 Grenzwerte berechnen

l i m e s (. . .) eintippen oder F3 3

ACHTUNG ! Die Ergebnis-Anzeige ***„ undef “*** kann drei verschiedene Bedeutungen haben:
- der Limes existiert nicht, oder
- der TR findet den Limes nicht, oder
- rechts- und linksseitiger Limes sind verschieden.

Empfehlung: Stets den rechts- und den linksseitigen Limes getrennt untersuchen!

Beispiel 1: Gesucht ist $\lim_{x \to 3} \frac{x}{x-3}$

– ENTWEDER direkt die Operation Limes aufrufen:

l i m e s (x ÷ (x – 3) , x , 3) ENTER ⇒ undef

⇒ also Empfehlung befolgen: rechts- und linksseitigen Limes getrennt berechnen.

Zweckmäßig: den Ausdruck speichern, z. B. als f 0 (x) oder y 1 (x)

(x ÷ (x – 3) STO▸ ***f 0 (x)*** ENTER ⇒ Fertig

– ODER von der nun gespeicherten Funktion f 0 (x) den rechts- und den linksseitigen Limes getrennt berechnen:

rechtsseitiger Limes

l i m e s (f 0 (x) , x , 3 , 1) ENTER ⇒ ∞

1 steht für „rechtsseitig“

linksseitiger Limes

l i m e s (f 0 (x) , x , 3 , (-) 1) ENTER ⇒ – ∞

–1 steht für „linksseitig“

Ergebnis: Der Grenzwert existiert nicht ;
Pol mit Vorzeichenwechsel.

Beispiel 2: Gesucht ist $\lim_{x \to \pm\infty} (x^2 \, e^{-x})$

– ENTWEDER den Ausdruck direkt eingeben:

2nd J

$x \to +\infty$: ***l i m e s (x ^ 2 e ((-) x) , x , ∞)*** ENTER ⇒ 0

$x \to -\infty$: ***l i m e s (x ^ 2 e ((-) x) , x , (-) ∞)*** ENTER ⇒ ∞

– ODER erst den Ausdruck als Funktion f 0 (x) speichern; dann weiter wie Bsp. 1.

5.3 Taylor – Reihen

F3 9 oder ***T a y l o r*** eintippen

Beispiel 1: $y = \sin x$ soll an der Stelle $a = \pi / 2$ bis zur 5. Potenz entwickelt werden.

T a y l o r (sin (x) , x , 5 , π ÷ 2) ENTER

oder F3 9 — Funktion — Variable — höchste Potenz — Entwicklungsstelle (falls nicht angegeben, wird in a = 0 entwickelt)

Mode „approx “ ⇒ $.04 (x – 1.57)^4 – .50 (x – 1.57)^2 + 1$

Mode „exakt “ ⇒ $\frac{(2x-\pi)^4}{384} - \frac{(2x-\pi)^2}{8} + 1$

Anm. zur Ergebnis-Darstellung :

1. Mode „exakt“ ist im Allg. zu bevorzugen, da dann das Bildungsgesetz der Reihe besser erkannt werden kann.
2. Die Reihenfolge der Summanden ist gerade umgekehrt wie üblich.
3. Das Konvergenzintervall wird NICHT angegeben!

Beispiel 2: $y = e^{\sqrt{x}}$ soll an der Stelle $a = 0$ bis zur 2. Potenz entwickelt werden.

1. Versuch:

T a y l o r (e (√ (x)) , x , 2) ENTER

oder F3 9 — Funktion — Variable — höchste Potenz — (Entw.-Stelle a = 0 braucht nicht angegeben zu werden)

$\Rightarrow$ Taylor ($e^{\sqrt{x}}$, x , 2 , 0) also kein Ergebnis !

2. Versuch: Substitution $\sqrt{x} = z$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x = z^2}$; $\boldsymbol{x^2 = z^4}$

(d.h. **2**. Potenz von x = **4**. Potenz von z

T a y l o r (e (z) , z , 4) **Í z =** $\sqrt{(x)}$ ENTER

höchste Potenz von z — Substitution

mit ♦ ENTER

Mode APPROX , AUTO $\Rightarrow$ $.04\,x^2 + .17\,x^{3/2} + .50\,x + \sqrt{x} + 1$

Mode AUTO , EXAKT $\Rightarrow$ $\frac{x^2}{24} + \frac{x^{3/2}}{6} + \frac{x}{2} + \sqrt{x} + 1$

(Auch hier führen die Voreinstellungen AUTO , EXAKT häufig zu klareren Ergebnissen.)

Kontrollen:

z. B. durch Einsetzen eines Wertes x „in der Nähe“ der Entwicklungsstelle a ; Vergleich mit dem exakten Wert:

$\Rightarrow$ „kleine“ Abweichung; anderenfalls Fehler

Kontrolle für Bsp. 2:

$x = 0{,}5$ exakt: $e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{0.5}} = 2.028$

Taylor: $\frac{0.5^2}{24} + \frac{0.5^{3/2}}{6} + \frac{0.5}{2} + \sqrt{0.5} + 1 = 2.026$ ($\Rightarrow$ 2 ‰)

5.4 Funktionen in Parameterdarstellung

Richtigen Graphikmodus wählen: MODE Graph 2 (PARAMETRISCH) ENTER ENTER

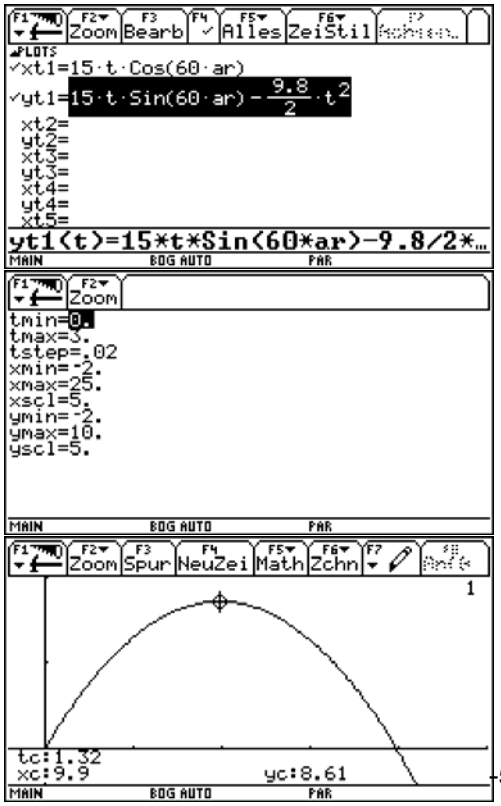
Eingabe der Funktionen: ◊ Y=
Beispiel: Wurfparabel

xt1(t)=15t*cos(60ar) ENTER
yt1(t)=15t*sin(60ar) –9.8/2*t^2 ENTER

Wahl von geeigneten Fenstervariablen

◊ WINDOW :

Darstellung des Graphen:
Anzeigen der Punkte und Parameter durch Spur F3



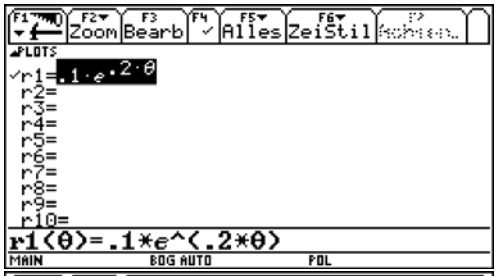
5.5 Funktionen in Polarkoordinaten

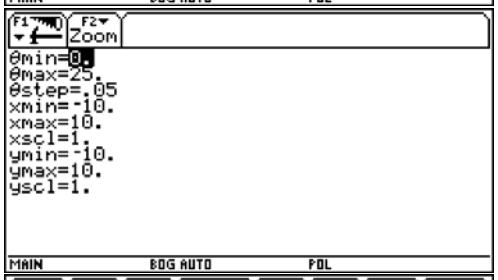
Richtigen Graphikmodus wählen:
MODE Graph 3 (POLAR) ENTER ENTER

Eingabe der Funktionen: ◊ Y=

Beispiel: logarithmische Spirale

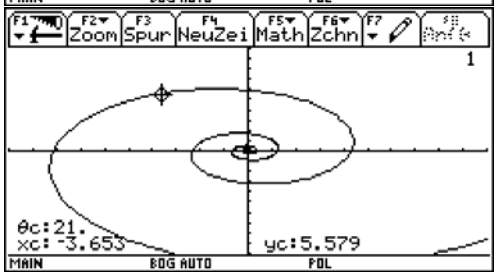
Wahl von geeigneten Fenstervariablen ◊ WINDOW :





Darstellung des Graphen ◊ GRAPH :

Anzeigen der Punkte und Winkel durch Spur F3

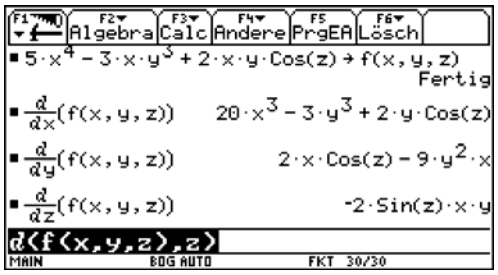


5.6 partielle Ableitungen von Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Hat man eine Funktion mit mehreren Veränderlichen, z.B.

$$f(x,y,z) = 5x^4 - 3xy^3 + 2xy\cdot\cos(z),$$

so erhält man die partiellen Ableitungen, indem man nach einer Variablen ableitet und die anderen Variablen wie Kontante behandelt:



6 LGS , Determinanten , Matrizen

(LGS = lineare Gleichungssysteme)

6.1 Übersicht

Im Folgenden werden nur die für „größere“ LGS (n >≈ 2) vorteilhaften matrizengestützten Verfahren des TI - V dargestellt.
Kleinere LGS können auch mit Hilfe der in Kap. TR 3 besprochenen Verfahren *„Löse“* und „*NullSt*“ gelöst werden, auch ohne die Verwendung von Matrizen.
„Sehr große“ LGS sollten besser auf einem PC gelöst werden, da hierbei für Darstellung der Ergebnisse und die Dokumentation die Verwendung eines Druckers sinnvoll ist (Eingabe- und Ausgabeprotokoll).

Besprochene Methoden

Methode	Charakterisierung
(1) ***LGlchSys (k , b)*** (S. 6.5) 2nd Math 4 5	(*k* = Koeff.-Matrix , *b* = Matrix der rechten Seite) Sehr gut geeignet Bei mehreren rechten Seiten *b1 . . . bm* (z. B. zur Berechnung der n Statisch Unbestimmten eines Systems mit m verschiedenen Lastfällen) : Gut geeignet , (entweder: Methode 1 m-mal anwenden, oder: Variante zu Methode 1 s. TR Kap. 6.3, oder: Methode 2, Kehrmatrix.) Nicht geeignet Zur genaueren Untersuchung **nichteindeutiger** Lösungen
Kehrmatrix: (2) ***k $^{-1}$*** (S. 6.6) anschließend Matrizenmultiplikation: ***k $^{-1}$ b STO▸ X***	(*k* = Koeff.-Matrix , k^{-1} = Kehrmatrix) Gut geeignet, wenn für eine unveränderte Koeffizientenmatrix *k* die Lösungen für mehrere rechte Seiten b_i gesucht sind. Zur Berechnung der Unbekannten *X* muss anschließend die Matrizenmultiplikation durchgeführt werden. Insofern ist die Methode 1 (*LGlchSys*) etwas bequemer. Nicht geeignet Zur genaueren Untersuchung **nichteindeutiger** Lösungen
(3) Gauß-Algorithmus: ***DiagForm (c)*** (S. 6.8) 2nd Math 4 4	*c* ist die um den Spaltenvektor *b* der rechten Seite erweiterte Koeffizientenmatrix *k* : *Hängean (k , b)* ⇒ *c* (n Zeilen , n +1 Spalten) (ggf. *c* direkt eingeben) Die Interpretation der Ergebnisse ist etwas gewöhnungsbedürftig. Im Falle **nichteindeutiger** Lösungen hat man aber den großen Vorteil, die Lösungsmengen angeben zu können. Auch gut für den Fall mehrerer rechter Seiten geeignet. Sehr gut geeignet für Vektorgeometrie TR-Kap. 7.5
(4) Determinanten-Methode: ***Det (. . .) STO▸ D1*** usw. (S. 6.8) Cramersche Regel: ***D_1 ÷ D STO▸ X1*** usw.	In der Koeffizientenmatrix *k* muss jeweils die i-te Spalte durch die rechte Seite *b* ersetzt werden. Dann ist die Determinante D_i dieser Matrix zu berechnen (vgl. Vorl. GI (6.1). ⇒ D_1 , D_2 , ... , D_n . Gemäß Cramerscher Regel die X_i berechnen: $X_i = D_i / D$ Sehr umständlich!

Da alle Methoden matrizengestützt ablaufen, muss zuerst die Behandlung von Matrizen im TI – V besprochen werden.

6.2 Matrizen

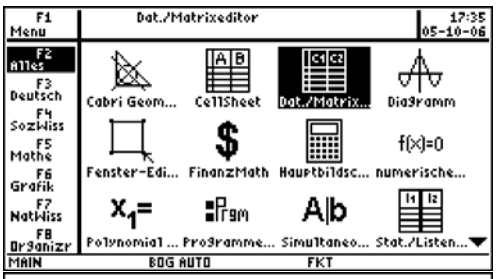
Eingeben , ändern , löschen ; Aufruf einzelner Elemente

6.2.1 Eingabe von Matrizen

1) Eingabe im Data / Matrix – Editor (zu bevorzugen)

Beispiel: Eingabe einer „neuen“ Matrix

$$m = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$



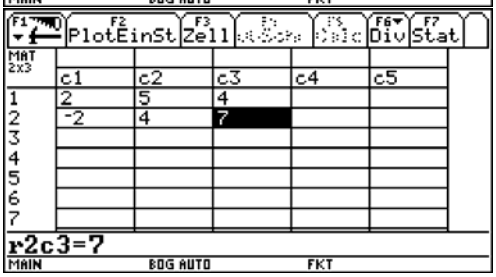
- APPS auf ***Dat./Matrix*** dann ENTER

- Dann auf ***3:neu***... ENTER

Typ :auf ***2 : Matrix***
Verzei : ***main***
Variable: ***m***
Dim-Zeile ***2***
Dim-Spalte ***3*** ENTER ENTER

⇒ Tabelle für die m_{ik} erscheint, oder Fehlermeldung.
(Anm. zur Fehlermeldung „Variable . . ist aktiv“ : d. h. die Variable *m* ist bereits vorher als Matrix belegt worden ; Abhilfe :

– entweder : neuen Variablen-Namen für *m* wählen
– oder : *m* ändern (überschreiben) → 6.2 b)
– oder : *m* löschen → 6.2 c),
dann *m* neu eingeben (s. o.)



- (Tabelle der m_{ik} eingeben ; hier : 2 Zeilen , 3 Spalten)

2 ENTER *5* ENTER *4* ENTER
-2 ENTER *4* ENTER *7* ENTER

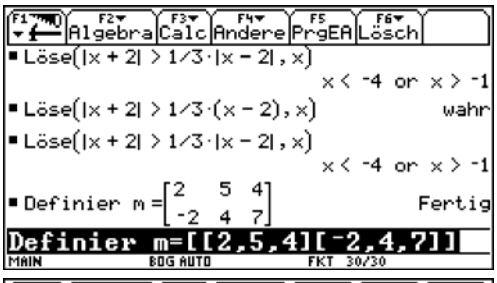
- ♦ [CALC HOME] (⇒ Hauptbildschirm ; weiter mit 6.3)

ODER:

2) Eingabe im Home – Editor

(Matrix-Elemente stets *zeilenweise* in [. . .] eingeben!)
z. B. 2 x 3 – Matrix *m* (s. o.) :
definier m = [[2 , 5 , 4] [-2 , 4 , 7]]

ENTER ⇒ $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ Fertig

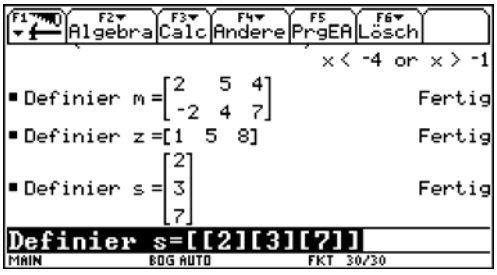


z. B. Zeilenvektor *z* : *z* = (1 5 8)

Definier z = [1 , 5 , 8] ENTER

z. B. Spaltenvektor *s* :

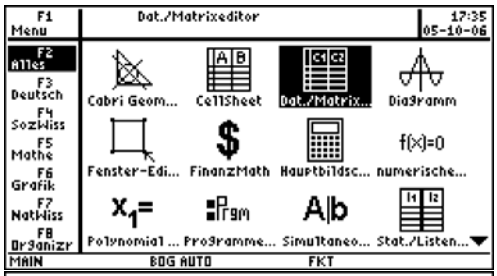
$$s = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$



Definier s = [[2] [3] [7]] ENTER

(zeilenweise Eingabe ; ⇒ besonders umständlich, da immer mit 2nd - Taste

6.2.2 Ändern von Matrizen



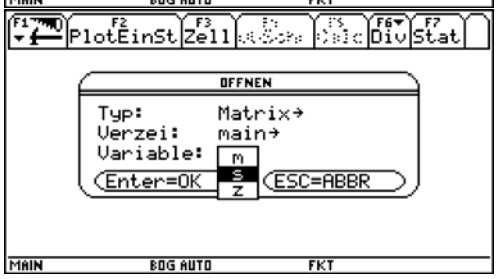
1) Ändern im Data / Matrix – Editor

z. B. soll die bereits eingegebene Matrix s geändert (korrigiert) werden: Es wird in diesem Zusammenhang nicht Zwischen Vektor und Matrix unterschieden.

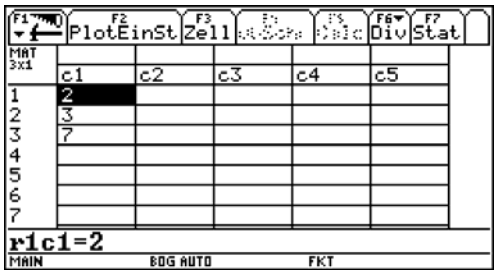
- APPS auf ***Dat./Matrix*** dann ENTER

  mit ***1 : aktuell*** wird die aktuelle Matrix geöffnet

  mit ***2 : öffnen*** kann eine beliebige abgespeicherte Matrix geöffnet werden.
  Es kann dann aus der Liste aller eingegebenen Matrizen Mit Cursor oder bei vielen Matrizen schneller durch Eingabe des Anfangsbuchstabens des Namens ausgewählt werden.



  ENTER ENTER (⇒ Tabelle für die s_{ik} erscheint)



- Tabelle mit den s_{ik} ändern ; jeweils mit ENTER abschließen)
- ◆ [CALC HOME] (⇒ Hauptbildschirm)

[Kontrolle:

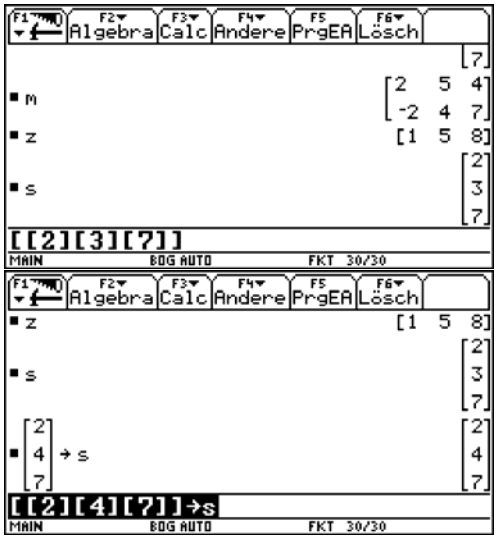
s ENTER ⇒ geänderte Matrix *s* erscheint im Protokollbereich]

ODER:

2) Ändern im Home – Editor in der Eingabezeile

[bei kleinen Matrizen bequemer als 1)]

z. B. soll die bereits eingegebene Matrix s geändert (korrigiert) werden :



- *s* ENTER ⇑ *(Cursor)* ENTER

(⇒ Elemente der Matrix s stehen in der Eingabezeile)

- s_{ik} in der Eingabezeile mit neuen Werten überschreiben
- abschließen mit : STO▸ *s* ENTER

6.2.3 Löschen von Matrizen

(oder anderen Variablen)

- 2nd [VAR-LINK] (⇒ Liste aller Variablen erscheint)
- zu löschende Variable mit dem Cursor ansteuern (oder schneller : Anfangsbuchst. des Variablen-Namens eingeben)
- (F 1) 1 (Löschen) ENTER
- bestätigen mit ENTER (Variable ist gelöscht) (ODER Abbrechen mit ESC ⇒ Var. nicht gelöscht)
- Rückkehr zum Hauptbildschirm mit ESC (oder mit ◆ [CALC HOME])

Gesperrte Größen müssen gegebenenfalls vorher entsperrt werden.

6.2.4 Aufruf einzelner Elemente

Wird für weitere Berechnungen ein einzelnes Element a_{ik} der Matrix $\underline{a}$ benötigt, so wird dieser Koeffizient wie folgt aufgerufen bzw. in eine Operation eingefügt:

Beispiel 1: Der Wert von $a_{2,3}$ soll angezeigt werden

a [2 , 3] ENTER Wert von $a_{2,3}$ erscheint rechts unten im Protokollbereich.

Beispiel 2: $a_{2,3}$ soll in einer mathem. Operation verarbeitet werden, z. B. $5\,a_{2,3}$

5 ⊠ ***a [2 , 3]*** ENTER Wert von $5\,a_{2,3}$ erscheint rechts unten im Protokollbereich.

Beispiel 3: Durch eine Matrizenoperation wurde ein LGS gelöst ⇒ Matrix $\underline{X}$ der Unbekannten. Im Verlauf der weiteren Berechnungen werden die Unbekannten X_i häufig *einzeln* benötigt. Dann kann es zweckmäßig sein, die X_i als Einzelwerte zusätzlich abzuspeichern:

X [1] STO▸ ***X1*** ENTER | ***X [2]*** STO▸ ***X2*** ENTER usw.

Wert der Unbekannten X_1 erscheint rechts unten im Protokollbereich und wird gleichzeitig im Speicher X1 abgelegt usw.

⇒ Vorteil: Bei den folgenden Operationen können die X_i ohne die lästigen eckigen Klammern weiterverarbeitet werden.

6.2.5 Rechnen mit Matrizen

Erzeugen einer **Nullmatrix** mit 2 Zeilen und drei Spalten:

neuMat(2,3) ENTER ⇒ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Erzeugen einer **Einheitsmatrix** mit 3 Zeilen und drei Spalten:

EinhM(3) ENTER ⇒ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Man berechne A+B, A-B, A·B, 5·A, A/2, A^T sowie A^5.

A+B ENTER ⟶ $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ A-B ENTER ⟶ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

A*B ENTER ⟶ $\begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$ 5*B ENTER ⟶ $\begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 20 & 15 \end{bmatrix}$

A/2 ENTER ⟶ $\begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 2 & 3/2 \end{bmatrix}$ A^T ENTER ⟶ $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (Transponierte von A)

Das Zeichen ^{T} kann wie folgt erzeugt werden: 2nd MATH 4 1 .

A^5 ENTER ⟶ $\begin{bmatrix} 3363 & 2378 \\ 4756 & 3363 \end{bmatrix}$

Falls Rechenoperationen mathematisch „unsinnig“ sind, erhält man die Fehlermeldung. **Dimensionsfehler**

Operationen mit den Zeilen einer Matrix

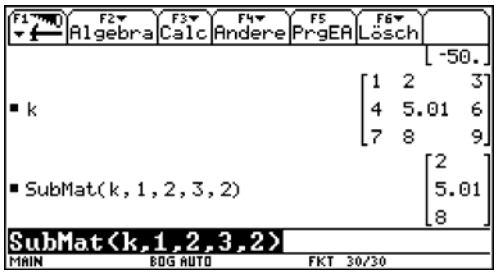
Multipliziere die zweite Zeile von A mit ¾ :

mZeile(3/4,A,2) ENTER ⟶ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 9/4 \end{bmatrix}$

Addiere das –4/3- fache der ersten Zeile von A zur zweiten Zeile:

mZeilAdd(-4/3,A,1,2) ENTER ⟶ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

Mit ***subMat***(M, Startzeile, Startspalte, Endzeile, Endspalte) kann man aus einer Matrix M eine Teilmatrix bilden, z.B. kommt man damit auch an einzelne Zeilen oder Spalten:



subMat(kann man auch mit 2nd [MATH] 4 G bekommen.

Beispiel:

Berechne die **inversen Matrizen** A^{-1} und B^{-1}

1. Weg : A^-1 ENTER ⟶ $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

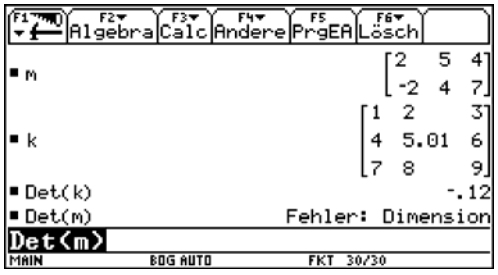
B^-1 ENTER ⟶ ERROR: Singuläre Matrix (d.h. B ist nicht invertierbar)

2. Weg: A 2nd x^{-1} ENTER ⟶ $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

B 2nd x^{-1} ENTER ⟶ ERROR: Singular matrix

6.3 Determinanten

Es sei ***k*** eine quadratische Matrix, dann erhält man mit ***det(k)*** (2nd Math 4 2) den Wert der Determinanten. Bei nichtquadratischen Matrizen ***m*** erhält man bei ***det(m)*** die Fehlermeldung: ***Dimension***.



6.4 Lösung des LGS *k x = b*

a1) Methode (1): *LGlchSys (k , b)* (nur *eine* rechte Seite b)

Beispiel: gesucht ist die Lösung des LGS

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 3X_3 &= 1 \\ 4X_1 + 5{,}01X_2 + 6X_3 &= 1 \\ 7X_1 + 8X_2 + 9X_3 &= 1 \end{aligned}$$

1. Schritt: Matrizen k und b gemäß Kap. TR 6.2 eingeben: $\underline{k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5.01 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Eingabezeile: ***LGlchSys (k , b)*** ENTER

2nd Math 4 5 oder mit 2nd Catalog .... oder eintippen

Ergebnis: $\begin{bmatrix} -.50 \\ 0. \\ .50 \end{bmatrix}$ (d. h. $X_1 = -0.50$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0.50$)

ACHTUNG! In vielen Fällen ist es zweckmäßig, das Ergebnis zu speichern,

- z. B. als Matrix unter dem Namen MX : STO▸ *MX* (NIE unter ***X*** speichern !)
- oder einzeln unter X_1 , X_2 , X_3 : s. 6.2.4 Bsp. 3

3. Schritt: Ergebnis überprüfen und werten

Spaltensummenkontrolle: $12 \cdot (-.50) + 15.01 \cdot 0 + 18 \cdot .50 = 3.00$ (OK)

Wertung: . Das vorliegende LGS ist schlecht konditioniert . Es gilt det(k) = -0,12 (recht nahe bei 0). Bei der Lösungsmethode mit ***LGlchSys*** fällt dies nicht weiter auf. (Die Methode wurde inzwischen verbessert). Bei der Lösungsmethode mit der Kehrmatrix werden die Ungenauigkeiten deutlich, allerdings auch bei anderen rechten Seiten (s. a2)). Wird der Koeffizient k_{22} von 5,01 auf 5 geändert, ergibt sich Det = 0 und das LGS ist nicht bzw. nicht eindeutig lösbar (vgl. Beispiel in der Vorlesung) (Fehlermeldung im TI-V: „Matrix singulär").

a2) Methode (1) bei *mehreren rechten Seiten* b1 . . . bm

Beispiel: gesucht ist die Lösung des LGS

(unveränderliche Koeffizientenmatrix k) (2 rechte Seiten , b1 und b2)

		b1	bzw.	b2
$X_1 + 2X_2 + 3X_3 =$		[1]		4
$4X_1 + 5{,}01X_2 + 6X_3 =$		[2]		5
$7X_1 + 8X_2 + 9X_3 =$		[3]		6

1. Schritt: Koeffizienten-Matrix k gemäß Kap. TR 6.2 eingeben:

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5.01 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

ACHTUNG! Komma bzw. Semikolon beachten!)

2. Schritt: Eingabezeile: ***LGlchSys (k , [[1] , 4 ; [2] , 5 ; [3] , 6])*** ENTER

2nd Math 4 5

Rechte Seiten: Werte ZEILEN-weise eingeben!
Eingabe in Matrizenform NICHT möglich !

Alternativ können auch die Koeffizienten von k ZEILEN-weise eingegeben werden:

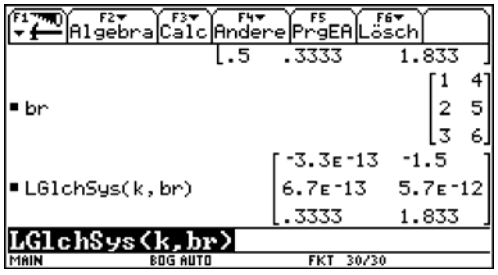
LGlchSys ([1 , 2 , 3 ; 4 , 5.01 ; 6 ; 7 , 8 , 9] , [1 , 4 ; 2 , 5 ; 3 , 6]) ENTER

k r. S.

Einfacher ist es, auch die ganze rechte Seite in Form einer Matrix einzugeben, z.B.:

$$br = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

LGlchSys (k , br) ENTER ⇒



X_i(b1) X_i(b2)

Ergebnis:
$$\begin{bmatrix} -3.3\text{E}-13 & -1.50 \\ 6.7\text{E}-13 & 5.7\text{E}-12 \\ .3333 & 1.833 \end{bmatrix}$$

d. h. für die rechte Seite b1 ist $X_1 = -3.3 \cdot 10^{-13} \approx 0$, $X_2 = 6.7 \cdot 10^{-13} \approx 0$, $X_3 = 0.3333$,

und für die rechte Seite b2 ist $X_1 = -1.50$, $X_2 = 5.7 \cdot 10^{-12} \approx 0$, $X_3 = 1.833$.

3. Schritt: Ergebnis überprüfen und werten → vorige Seite!

b) Methode (2) : Kehrmatrix k^{-1}

Diese Methode sollte nur dann in Erwägung gezogen werden, wenn häufig „sehr viele“ rechte Seiten für ein und dieselbe Koeffizientenmatrix vorgegeben sind, oder die Kehrmatrix schon bekannt ist. Als Kriterium gilt:

geg.: n Gln mit n Unbekannten
m rechte Seiten b1 . . . bm
} m > n ⇒ Kehrmatrix im Allg. sinnvoll; aber TI-V : Methode 1 ist genauer

Beispiel (wie vor): gesucht ist die Lösung des LGS

(unveränderliche Koeffizientenmatrix k) (3 rechte Seiten , b1, b2 und b3)

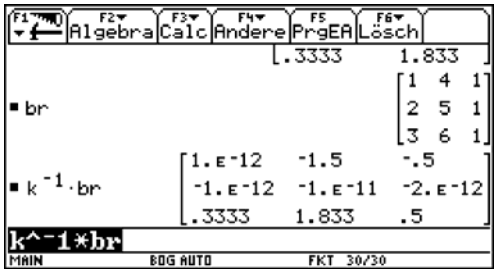
				b1	bzw.	b2	bzw.	b3
X_1	+	$2X_2$	+ $3X_3$ =	1		4		1
$4X_1$	+	$5{,}01X_2$	+ $6X_3$ =	2		5		1
$7X_1$	+	$8X_2$	+ $9X_3$ =	3		6		1

1. Schritt: Koeffizienten-Matrix k gemäß Kap. TR 6.2 eingeben:

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5.01 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

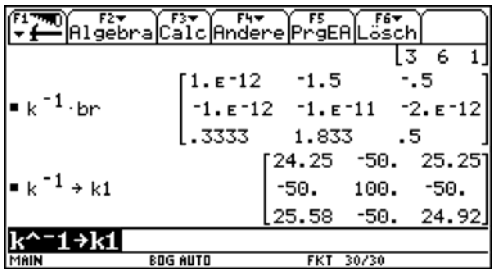
2. Schritt: die rechten Seiten als Matrix br gemäß Kap. TR 6.2 eingeben:

$$br = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$



3. Schritt: ***k*** [2nd] [x^{-1}] [×] ***br*** [ENTER] ⇒

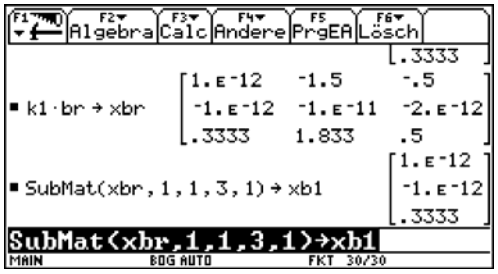
Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Methode 1 zeigt, dass in diesem Fall einer schlecht konditionierten Koeffizientenmatrix die Methode ***LGlchSys*** zu etwas besseren Ergebnissen führt.



4. Schritt: Soll häufiger mit derselben Koeffizientenmatrix ein Gleichungssystem gelöst werden, ist es zweckmäßig, das Ergebnis zu speichern, z. B. unter ***k1***:

k [2nd] [x^{-1}] [STO▸] ***k 1*** [ENTER] ⇒

Mit ***k1*** [×] ***br*** [ENTER] erhält man dann wieder die obige Lösung.



5. Schritt: Speichert man die Lösung in der Matrix ***xbr*** ab, so kann man mit Hilfe von ***SubMat*** die einzelnen Lösungsvektoren z.B. in ***xb1***, ***xb2***,...speichern:
Mit der Matrix ***xbr*** oder den Vektoren ***xb1***, ***xb2***,kann im Matrizenkalkül weitergerechnet werden.Sollen die Unbekannten jedoch im weiteren Verlauf der Berechnungen häufig als Einzelwerte verwendet werden, so ist der Aufruf der Werte in der Form

xb1 [1] = X_1
xb1 [2] = X_2
xb1 [3] = X_3
} für die rechte Seite b1

xb2 [1] = X_1
xb2 [2] = X_2
xb2 [3] = X_3
} für die rechte Seite b2

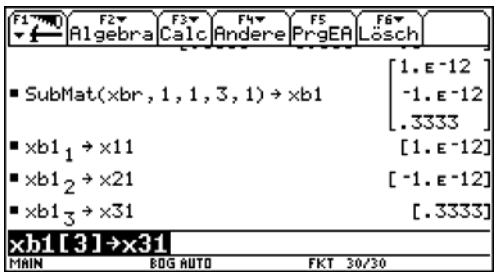
wegen der Klammern sehr umständlich. Dann empfiehlt sich wieder die Speicherung der Einzelwerte, wobei hier zwei Indizes zu verwenden sind (2. Index kennzeichnet üblicherweise die Ursache, hier also die Nr. der rechten Seite):

6. Schritt: nur,falls die X_i häufig als Einzelwerte benötigt werden, ein Abspeichern in einzelnen Variablen:

xb1 [1] STO▸ ***X11***

xb1 [2] STO▸ ***X21***

xb1 [3] STO▸ ***X31***



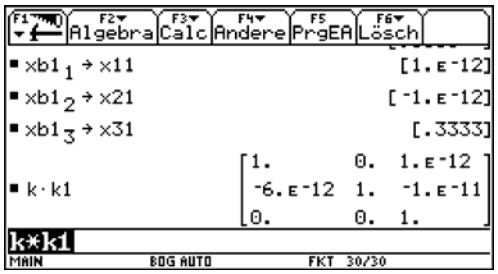
7. Schritt: Ergebnis überprüfen und werten

Kontrolle z. B. durch die Matrizenmultiplikation

$$\underline{k} \cdot \underline{k}^{-1} \overset{!}{=} \underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

hier:

k ⊠ ***k1*** ENTER ⇒



Wertung: Da das vorliegende LGS schlecht konditioniert ist, ergeben sich statt der exakten Null außerhalb der Hauptdiagonalen Zahlen in der Größenordnung von 10^{-11} bis 10^{-12} (= „Rechner-Null“). Weiterer Kommentar wie vor!

c) Methode (3): Gauß – Algorithmus *DiagForm (. . .)*

Diese Methode ist etwas umständlicher als die Methoden 1 und 2, da zunächst die Koeffizientenmatrix $\underline{k}$ und der Spaltenvektor der rechten Seite $\underline{b}$ zu einer Matrix mit n Zeilen und n+m Spalten zusammengefasst werden müssen, wenn man gleichzeitig für m „rechte Seiten“ das Gleichungssystem lösen möchte.

Beispiel: gesucht ist die Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5{,}01 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b_i \text{ mit } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Schritt: Matrizen ***k*** und ***br*** gemäß Kap. TR 6.2 eingeben:

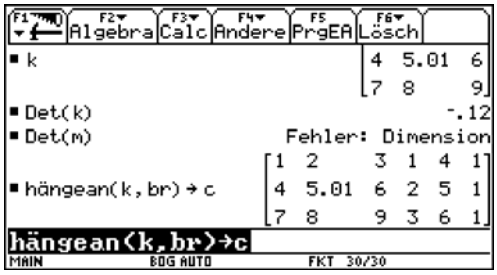
$$k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5.01 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad br = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Matrizen ***k*** und ***br*** zu einer Matrix zusammenfassen (und speichern):

Hängean (k , br) STO▸ ***c*** ENTER ⇒

2nd Math 4 7

[ODER: c direkt über den Matrix-Editor mit 3 Zeilen / 6 Spalten eingeben.]

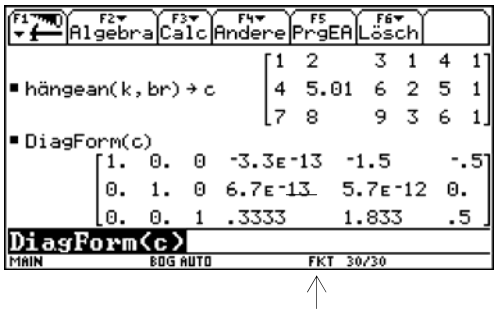


3. Schritt: Lösung des LGS

DiagForm ***(c)*** [ENTER] ⇒

2nd Math 4 4

Die Ergebnisse stehen in den letzten Spalten. Sie sind identisch mit den Ergebnissen von ***LGlchSys***.



4. Schritt: Ergebnis überprüfen und werten : wie vor.

Anmerkung: Mit dem TI-V lässt sich der Gaußsche Algorithmus auch detailliert verfolgen. Hier sei nur erwähnt, wie die Koeffizientenmatrix k auf Dreiecksform gebracht werden kann:

Verw (k) [ENTER] ⇒ Anzeige: $\begin{pmatrix} 1 & 1.14 & 1.29 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Für die praktische Rechnung werden diese Operationen im Allg. jedoch nicht benötigt.

d) Methode (4) : Determinanten-Methode $X_i = D_i / D$

Diese Methode ist wegen des Zusammenfügens der einzelnen Spalten zu den n Zählerdeterminanten viel umständlicher als alle zuvor besprochenen Methoden. Da sie für die praktische Lösung von LGS kaum eine Rolle spielt, wird sie im Rahmen dieses Kurses nicht weiter besprochen.

Die Bedeutung der Determinantentheorie für die Untersuchung der Lösbarkeit von LGS wurde in der Vorlesung erläutert.

7 Vektorrechnung □

[2nd] [MATH] [4] bzw. [2nd] [MATH] [4] L bzw. mit [APPS] s. 6.2 (Matrix-Editor)

7.1 Vektoren eingeben und speichern

a) Eingabe eines Vektors z. B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$; Vereinbarung für diesen TR-Kurs: **= { 2 ; 3 ; – 6 }**

(Zur Platzersparnis wird die allg. übliche Spalten-Schreibweise im Folgenden in Zeilenform und in geschweiften Klammern geschrieben!)

Eingabe ENTWEDER direkt in der Eingabezeile:

[2 ; 3 ; [(–)] ***6]*** [ENTER] ⇒ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

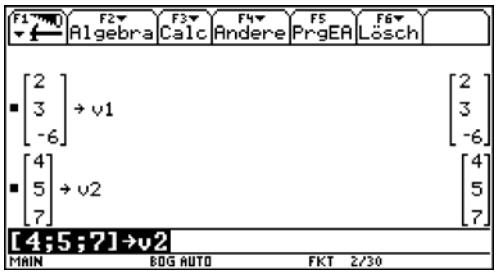
ODER im Matrix-Editor: mit [APPS] (Daten , Matrix . . ; weiter s. TR 6.2 ; mit DIM Zeile = 3 , Spalte = 1)

b) Eingabe und Speichern eines Vektors z. B. { 2 ; 3 ; – 6 } als *v1* und { 4 ; 5 ; 7 } als *v2* speichern

ENTWEDER direkt in der Eingabezeile:

[2 ; 3 ; (–) ***6]*** STO▸ ***v1*** ENTER

[4 ; 5 ; 7 ***]*** STO▸ ***v2*** ENTER ⇒



ODER im Matrix-Editor (s.o.)

c) Eine Komponente des Vektors ansprechen z. B. die zweite Komponente (= 3) von $\vec{v}_1$:

v 1 [2] ENTER ⇒ 3

zweite Komponente

7.2 Grundoperationen

Addition (Subtraktion), Multiplikation mit Skalar, Betrag (Länge),Abstand zweier Punkte, Einheitsvektoren, Parallelität

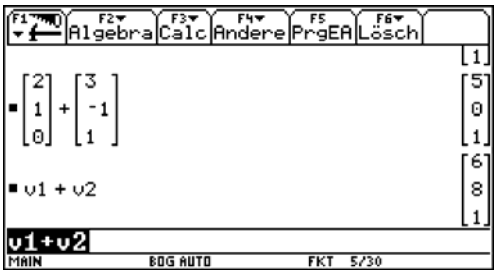
a) Vektor - Addition (Subtraktion)

- nicht gespeicherte Vektoren: z. B. { 2 ; 1; 0 } + { 3 ; –1; 1 }

  [2 ; 1 ; 0] + [3 ; (–) ***1 ; 1]*** ENTER ⇒

- gespeicherte Vektoren: z. B. $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (s. o.)

  v 1 + v 2 ENTER ⇒



ACHTUNG ! Nicht gespeicherte Vektoren (Komponenten in eckigen Klammern eingeben) und gespeicherte Vektoren (nur die Namen eingeben) werden bei allen Operationen gleich behandelt ! Deshalb wird im Folgenden der Einfachheit halber im Allg. mit *gespeicherten* Vektoren gearbeitet !

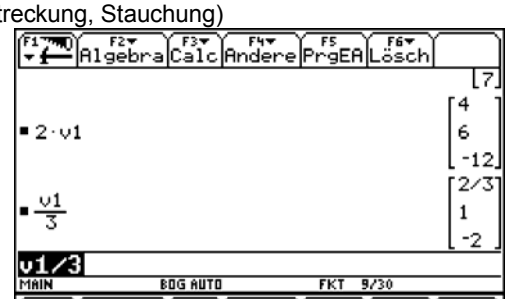
b) Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (⇒ Streckung, Stauchung)

geg. und gespeichert : $\vec{v}_1 = \{ 2 ; 3 ; -6 \}$;

gesucht: $2\,\vec{v}_1$; $1/3\,\vec{v}_1$

2 ⊠ ***v 1*** ENTER ⇒

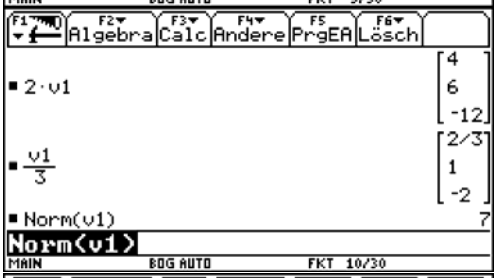
v 1 ÷ ***3*** ENTER ⇒



c) Betrag (Länge) eines Vektors vgl. Vorlesung

Norm (v 1) ENTER ⇒

eintippen oder 2nd [MATH] 4 H



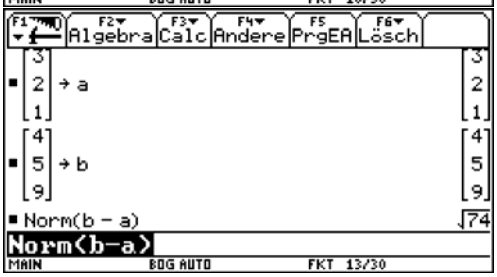
d) Abstand zweier Punkte Vorl. Gl (7.5)

geg.: P_1 (3 ; 2 ; 1) ; P_2 (4 ; 5 ; 9) ; ges.: $\overline{P_1 P_2}$

Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{0\,P_1} = \{ 3 ; 2 ; 1 \}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{0\,P_2} = \{ 4 ; 5 ; 9 \}$

eingeben und speichern (s. TR 7.1 b)

Abstand: ***norm (b – a)*** ENTER ⇒



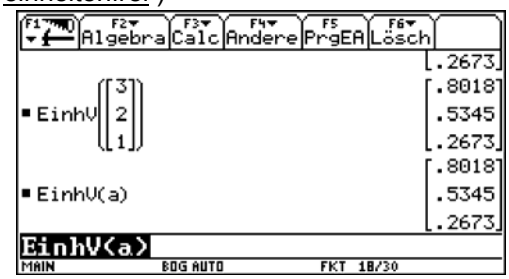
Alternative: Gleichung aus der Vorlesung direkt auswerten: $\sqrt{(4-3)^2 + (5-2)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{74} \approx 8{,}602$

e) Einheitsvektor (= Vektor der Länge 1 ; dieser Vektor ist stets einheitenfrei)

geg.: $\vec{a}$ = (3 ; 2 ; 1) (s.o.) ; ges.: $\vec{a}^{\,0}$ = ?

EinhV ([3 ; 2 ; 1]) ♦ ENTER ⇒

eintippen oder 2nd [MATH] 4 L 1:



oder, wenn $\vec{a}$ bereits gespeichert

EinhV (a) ♦ ENTER ⇒

[Kontrolle: $\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}} \overset{!}{=} 1$; hier: $\sqrt{.802^{\,2} + .535^{\,2} + .267^{\,2}} = 1.00001 \approx 1$]

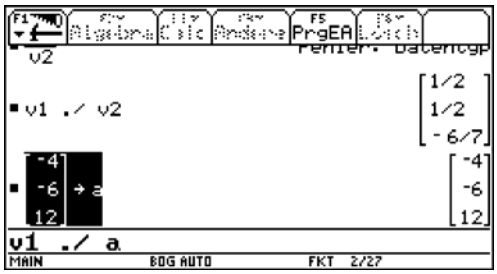
f) Sind zwei Vektoren **parallel (kollinear)** ?

geg.: $\vec{v}_1$ = (2 ; 3 ; -6) ; $\vec{v}_2$ = (4 ; 6 ; 7) ;

prüfen: sind $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ parallel ?

Dezimalpunkt

v 1 ⊡ ÷ ***v 2*** ENTER ⇒



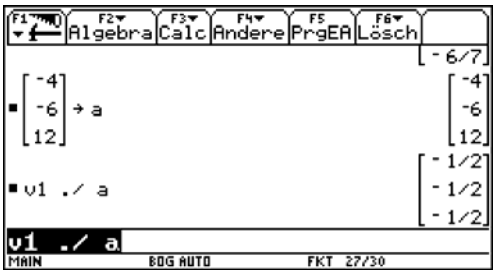
Die 6 Komponenten werden paarweise dividiert. Nur, wenn alle 3 Ergebniszahlen gleich sind, sind die beiden Vektoren parallel (kollinear).

Hier: Da nur die ersten beiden Ergebniszahlen übereinstimmen, sind $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ nicht parallel.

Beispiel: geg.: $\vec{v}_1$ = (2 ; 3 ; -6) ; $\vec{a}$ = (-4 ; -6 ; 12) ;

sind $\vec{v}_1$ und $\vec{a}$ parallel ?

v 1 ⊡ ÷ ***a*** ENTER ⇒



Alle 3 Ergebniszahlen sind gleich, also sind die beiden Vektoren parallel (kollinear) und somit linear abhängig. Sie sind deshalb z. B. nicht als Basisvektoren geeignet.

Negatives Vorzeichen: ⇒ Die beiden Vektoren sind entgegengesetzt gerichtet.

7.3 Skalar- , Vektor- und Spatprodukt ; lineare Unabhängigkeit

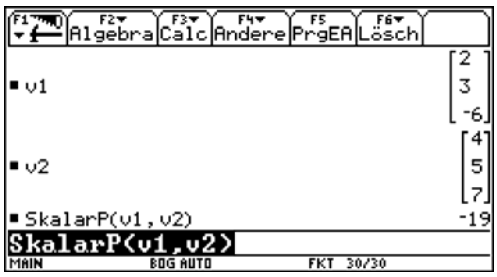
a) Skalarprodukt („Punktprodukt") (⇒ z. B. Arbeit) (vgl. Vorlesung)

geg. und gespeichert : $\vec{v}_1$ = { 2 ; 3 ; – 6 } ;

$\vec{v}_2$ = { 4 ; 5 ; 7 } ; ges.: $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$

SkalarP (v 1 , v 2) ENTER ⇒

eintippen oder 2nd [MATH] 4 L 3:

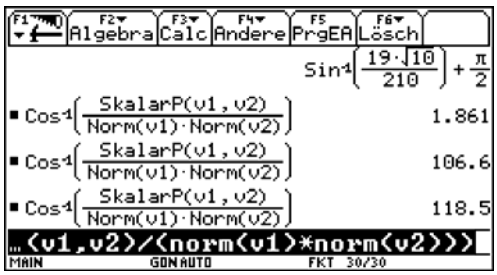


b) Winkel zwischen 2 Vektoren (vgl. Vorlesung)

geg. und gespeichert : $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ (s.o.) ; ges.: Winkel zwischen $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$

[COS-1] ***(skalarp (v1 , v2) ÷ (norm (v1) ⊠ norm (v2)))***

♦ ENTER ⇒ 1.861 (wenn TR auf Bogenmaß eingestellt ist)
106.6 (wenn TR auf Altgrad eingestellt ist)
118.5 (wenn TR auf Neugrad eingestellt ist)

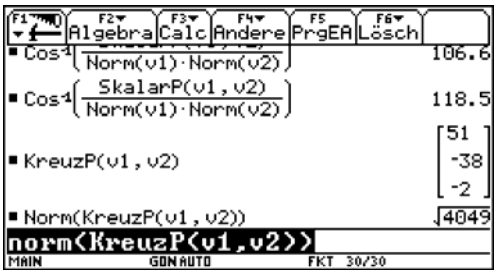


c) Vektorprodukt („Kreuzprodukt") (⇒ z. B. Drehmoment ; vgl. Vorlesung)

geg. und gespeichert : $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ (s.o.) ; ges.: Vektorprodukt $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

KreuzP (v 1 , v 2) ENTER ⇒

eintippen oder 2nd [MATH] 4 L 2:



d) Fläche des von 2 Vektoren aufgespannten Parallelogramms (vgl. Vorlesung)

geg. und gespeichert : $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ (s.o.) ; ges.: Fläche des zugehörigen Parallelogramms

norm (KreuzP (v 1 , v 2)) ENTER ⇒ $\sqrt{4049} \approx 63.63$ (s.o.)

(Anm.: Die entsprechende Dreiecksfläche ist gleich der halben Fläche des Parallelogramms)

e) Spatprodukt V (Volumen V des von 3 Vektoren aufgespannten Spates)

geg. und gespeichert : $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ (s.o.); $\vec{v}_3$ = (-2 ; 2 ; 4) ;

ges: $V = ((\vec{v}_1 \times v_2) \bullet v_3$

Lösung 1 : mit Kreuz- und Punktprodukt

skalarp (kreuzp(v 1 , v 2) , v 3) ENTER ⇒

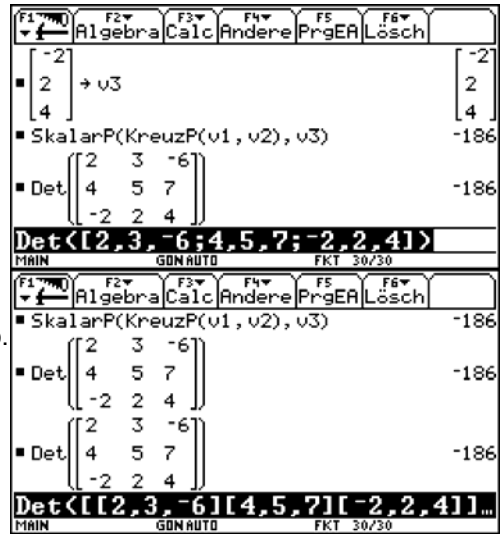
Lösung 2 : mit Hilfe der Determinante

det ([2 , 3 , – 6 ; 4 , 5 , 7 ; – 2 , 2 , 4]) ENTER ⇒ s.o.

Komponenten von $\vec{v}_1$ ... $\vec{v}_2$ ... $\vec{v}_3$

oder

det ([[2 , 3 , – 6] [4 , 5 , 7] [– 2 , 2 , 4]]) ENTER ⇒



f) Lineare Unabhängigkeit von 3 Vektoren im Raum

Spatprodukt V : (Berechnung von V nach Abschn. e)

- $V \neq 0$ ⇒ die drei Vektoren sind linear unabhängig (. . . als Basis geeignet)
- $V = 0$ ⇒ die drei Vektoren sind linear abhängig (. . . als Basis ungeeignet)

Beispiel 1: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ = geg. Vektoren nach Abschn. e) (s. vorige Seite)
Die drei Vektoren spannen einen Spat mit dem Volumen V = -186 auf
⇒ Die Vektoren sind linear unabhängig

Beispiel 2: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ = geg. Vektoren nach Abschn. e) (s. vorige Seite) ; $\vec{v}_4$ = { 2 ; 3,5 ; -15,5 }

skalarp (kreuzp (v 1 , v 2) , v 4) ENTER ⇒ 0

⇒ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_4$ sind linear abhängig (liegen in einer Ebene) und sind deshalb z. B. nicht als Basisvektoren im Raum geeignet.
(Im vorliegenden Beispiel ist $\vec{v}_4$ eine Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$:

$\vec{v}_4 = 2\,\vec{v}_1 - ½\,\vec{v}_2$)

7.4 Zerlegung eines Vektors $\vec{F}$ in drei vorgegebene Richtungen im Raum

geg. und gespeichert (s. o.):

(Einheit: m)

3 (schiefe) Basisvektoren $\vec{v}_1 = \{ 2 ; 3 ; -6 \}$; $\vec{v}_2 = \{ 4 ; 5 ; 7 \}$; $\vec{v}_3 = \{ -2 ; 2 ; 4 \}$

und ein Kraftvektor $\vec{F} = \{ F_x ; F_y ; F_z \} = \{ 26 ; 12 ; 30 \}$ (Einheit: kN)

ges.: Zerlegung von $\vec{F}$ in Richtung von $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ ($\vec{F}$ Linearkombination von $\vec{v}_1^0$, $\vec{v}_2^0$ und $\vec{v}_3^0$)

$\Rightarrow$ physikalische Komponenten F_1 ; F_2 ; F_3 (kN) in Richtung von $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$.

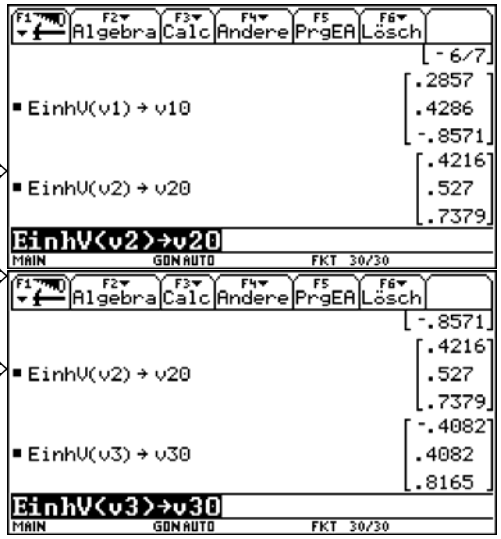
- Einheitsvektoren $\vec{v}_1^0$, $\vec{v}_2^0$, $\vec{v}_3^0$ (s. TR-Kap. 7.2 e)

(beliebiger Name)

e i n h v (v 1) STO▸ ***v 1 0*** ◆ ENTER $\Rightarrow$

e i n h v (v 2) STO▸ ***v 2 0*** ◆ ENTER $\Rightarrow$

e i n h v (v 3) STO▸ ***v 3 0*** ◆ ENTER $\Rightarrow$



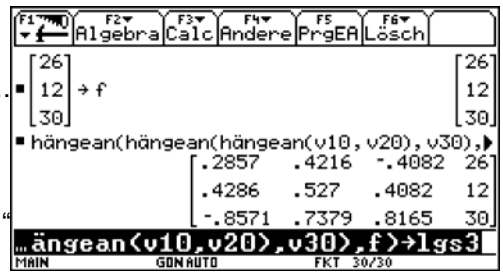
(Die 3 Einheitsvektoren sind einheitenfrei!)

- Lineares Gleichungssystem aufstellen: (vgl. Vorlesung)

Da die 4 Vektoren mit ihren insgesamt 12 Komponenten bereits gespeichert sind, ist es zweckmäßig, diese mit dem Befehl „ *Hängean* “ zum LGS zusammenzusetzen (vgl. TR-Kap. 6.3 c).

hängean (hängean (hängean (v 1 0 , v 2 0) , v 3 0) , F) ...

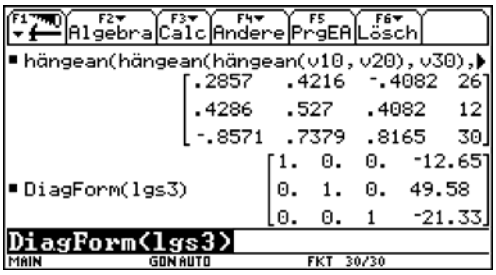
STO▸ ***LGS3*** ENTER $\Rightarrow$



- LGS lösen: (hier zweckmäßig mit Gauß $\Rightarrow$ „ *DiagForm* “ – Befehl, vgl. TR-Kap. 6.3 c)

(Alternativ können auch die anderen in TR-Kap. 6 besprochenen Methoden zur Lösung von LGS verwendet werden; jedoch ist es dann sinnvoll, nur die 9 Koeffizienten in einer Matrix zu speichern.)

d i a g f o r m (LGS3) ENTER $\Rightarrow$



- Ergebnis: physikalische Komponenten von $\vec{F}$: $F_1 = -12{,}6$; $F_2 = 49{,}6$; $F_3 = -21{,}3$ kN

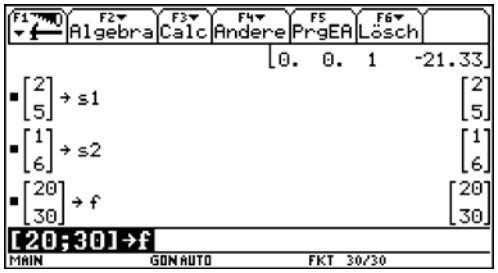
(in Richtung von $\vec{v}_1$ ... $\vec{v}_2$ ... $\vec{v}_3$)

Ebenes Problem : **Zerlegung eines Vektors $\vec{F}$ in zwei vorgeg. Richtungen in der Ebene**

geg. und gespeichert (s. o.):

2 (schiefe) Basisvektoren $\vec{s}_1 = \{ 2; 5 \}$; $\vec{s}_2 = \{ 1; 6 \}$ (Einheit: m)

und ein Kraftvektor $\vec{F} = \{ F_x ; F_y \} = \{ 20; 30 \}$ (Einheit: kN)



ges.: Zerlegung von $\vec{F}$ in Richtung von $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$

$\Rightarrow$ physikalische Komponenten F_1 ; F_2 (kN) in Richtung von $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$

- Einheitsvektoren $\vec{s}_1^{\,0}$, $\vec{s}_2^{\,0}$ (s. TR-Kap. 7.2 e)

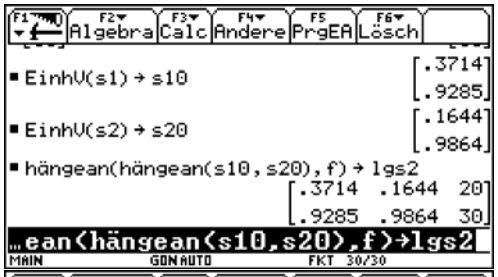
  einhv (s 1) STO▸ ***s 10*** ◆ ENTER $\Rightarrow$

  einhv (s 2) STO▸ ***s 20*** ◆ ENTER $\Rightarrow$

- Lineares Gleichungssystem aufstellen: (2 Gln / 2 Unbekannte)

  hängean (hängean (s 10 , s 20) , F) . . .

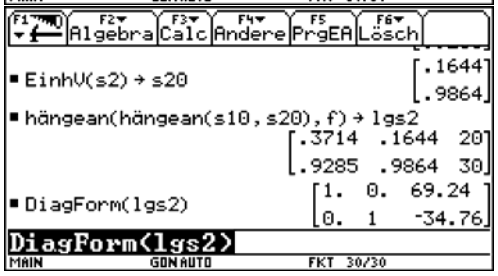
  . . . STO▸ ***LGS2*** ENTER $\Rightarrow$



- LGS lösen: (hier zweckmäßig mit Gauß

  $\Rightarrow$ „ *DiagForm* "- Befehl, vgl. TR-Kap. 6.3 c)

  diagform (LGS2) ENTER $\Rightarrow$



- Ergebnis: physikalische Komponenten von $\vec{F}$: $F_1 = 69{,}2$; $F_2 = -34{,}8$ kN

  (in Richtung von $\vec{s}_1$ . . . $\vec{s}_2$)

- Alternativen:
  - LGS direkt eingeben und mit Hilfe der in TR-Kap. 6 besprochenen Methoden lösen
  - Lösung „konventionell" mit dem Sinus-Satz (nur für den ebenen Fall!)
  - die Gleichungen aus der Vorlesung direkt auswerten

7.5 Vektorgeometrie : Punkt, Gerade, Ebene in $\mathbb{R}3$

7.5.1 Speichern einer Geraden

Parameterdarstellung: $\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Beispiel

geg.: $\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ -15 \end{pmatrix}$

ACHTUNG!
Speicher *u*
muss leer sein!

- entweder :

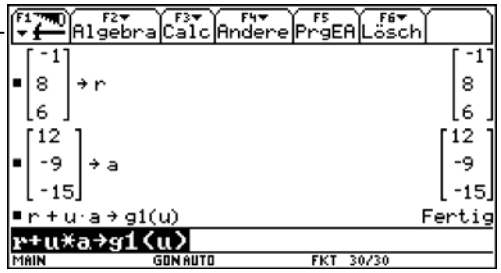
  [-1 ; 8 ; 6] + u ⊠ [12 ; -9 ; -15] STO▸ ***g 1 (u)*** ENTER $\Rightarrow$ Fertig

- oder : (häufig ist es zweckmäßig, für anschließende Operationen Orts- und Richtungsvektoren einzeln zu speichern)

  [-1 ; 8 ; 6] STO▸ ***r*** ENTER $\Rightarrow$

  [12 ; -9 ; -15] STO▸ ***a*** ENTER $\Rightarrow$

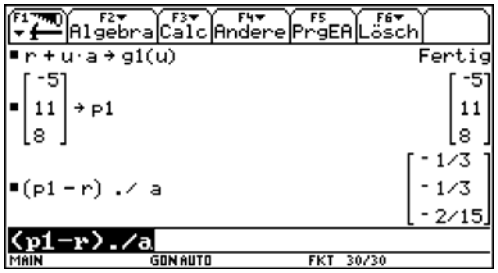
  r + u ⊠ a STO▸ ***g 1 (u)*** ENTER $\Rightarrow$ Fertig



(Anm.: Die Variablen-Namen r_1 , r_2 , r_3 sind beim TI-V reserviert, können also nicht verwendet werden!)

7.5.2 Liegt ein geg. Punkt P auf der Geraden ?

Beispiel 1 geg.: $\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u \cdot \vec{a}$ (s. o.) ; Punkt P_1 (-5 ; 11 ; 8)



- Vektor $\overrightarrow{OP_1}$ als $\vec{p}_1$ speichern :

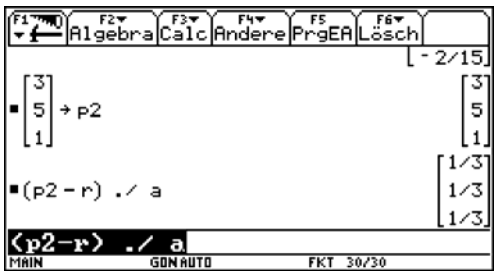
  [-5 ; 11 ; 8] STO▶ ***p 1*** ENTER ⇒

- Parallelität der Vektoren $\vec{p}_1 - \vec{r}$ und $\vec{a}$ prüfen:
  (vgl. Kap. TR 7.2 f) (Dezimal-Pkt.)

  (p 1 – r) ⊡ ÷ **a** ENTER ⇒

- Ergebnis : P_1 liegt nicht auf g_1 , da nicht alle 3 Komponenten des Ergebnisses gleich sind.

Beispiel 2 geg.: $\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u \cdot \vec{a}$ (s. o.) ; Punkt P_2 (3 ; 5 ; 1)



- Vektor $\overrightarrow{OP_2}$ als $\vec{p}_2$ speichern :

  [3 ; 5 ; 1] STO▶ ***p 2*** ENTER ⇒

- Parallelität der Vektoren $\vec{p}_2 - \vec{r}$ und $\vec{a}$ prüfen :
  (vgl. Kap. TR 7.2 f)

  (p 2 – r) ⊡ ÷ **a** ENTER ⇒

- Ergebnis : P_2 liegt auf g_1 , da alle 3 Komponenten des Ergebnisses gleich sind.

7.5.3 Lage zweier Geraden zueinander ; Abstand bzw. Schnittpunkt

Übersicht : Lage

Hier wird eine Methode verwendet, die unmittelbar eine der vier möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden (windschief / Schnittpunkt / parallel / gleich) liefert. Die Gleichsetzung der beiden Geradengleichungen führt zu einem homogenen LGS, das mit dem Gaußschen Algorithmus untersucht wird. Eine ausführliche Darstellung der Theorie findet sich auf der TI-Materialienseite „education.ti.com/Deutschland/Materialien.htm“ in der Rubrik „TI-92/Lin.Algebra“ ; Autor: Heinz Laakmann.

ACHTUNG! Speicher *u* und *v* müssen leer sein!

geg.:

$$\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u \cdot \vec{a}$$

$$\vec{g}_2(v) = \vec{s} + v \cdot \vec{b}$$

(zweckmäßig: alle 6 Vektoren speichern)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Matrix ***c*** eingeben

und speichern : (3 Zeilen, 3 Spalten)

$$c = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & s_1 - r_1 \\ a_2 & -b_2 & s_2 - r_2 \\ a_3 & -b_3 & s_3 - r_3 \end{pmatrix}$$

entweder „per Hand“
(APPS 6 3 vgl. Kap. TR 6.2)

oder besser (besonders, wenn die Komponenten nicht ganzzahlig sind) : Matrix ***c*** mit „Hängean“ (2nd Math 4 7) zusammensetzen
(s. folgende Beispiele) !

Matrix ***c*** auf Diagonalform bringen :

DiagForm (c)

(2nd Math 4 4)

eine durch den Gauß-Algorithmus entstandene (beliebige) Zahl

4 mögliche Ergebnisse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{windschief}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{u_S} \\ 0 & 1 & \boxed{v_S} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Schnittpunkt } S : \quad S = g_1(u_S) \quad [\text{K.: } = g_2(v_S)]$$

ggf. Abstand berechnen
(s. nächste Seite)

$$\begin{pmatrix} 1 & \otimes & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 \text{ parallel } g_2$$

ggf. Abstand berechnen
(s. nächste Seite)

$$\begin{pmatrix} 1 & \otimes & \otimes \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 \text{ gleich } g_2$$

- **Abstand zweier Geraden**

ACHTUNG! Speicher *u* und *v* müssen leer sein!

Abstand e_w windschiefer Geraden

geg.: 2 windschiefe Geraden (s. vorige Seite!) $\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u\cdot\vec{a}$; $\vec{g}_2(v) = \vec{s} + v\cdot\vec{b}$

(zweckmäßig: $\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{s}$, $\vec{b}$ speichern.)

Formel: $$e_w = \left| (\vec{s} - \vec{r}) \bullet \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} \right|$$

Kreuzprodukt berechnen und z. B. unter dem Namen *akb* speichern:

KreuzP (a , b) STO▶ ***akb*** ENTER

(2nd Math 4 L 2)

Abstand e_w berechnen:

abs (SkalarP (s – r , akb ÷ ***Norm (akb)))*** ENTER

(2nd Math 4 L 3) (2nd Math 4 H 1)

(Anm.: Innerhalb des Betragszeichens auf der rechten Seite der Formel ergibt sich wegen des Punktprodukts eine Skalar; deshalb muss der Befehl „abs“ verwendet werden, nicht der Befehl „Norm“, der nur für Vektoren gilt.)

Abstand e_p paralleler Geraden

geg.: 2 parallele Geraden (s. vorige Seite!) $\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u\cdot\vec{a}$; $\vec{g}_2(v) = \vec{s} + v\cdot\vec{b}$

(zweckmäßig: $\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{s}$ speichern.)

Formeln: $$\vec{e}_p = (\vec{s} - \vec{r}) \times \frac{\vec{a}}{a} \quad ; \quad e_p = \left|\vec{e}_p\right|$$

Abstand e_p berechnen:

Norm (KreuzP (r – s , a ÷ ***Norm (a)))*** ENTER

(2nd Math 4 H 1) (2nd Math 4 L 2)

- **Beispiele zu Lage und Abstand zweier Geraden**

Beispiel 1:

geg.: 2 Geraden $\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{g}_2(v) = \vec{s} + v\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}7\\5\\4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$

Die vier Vektoren $\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{s}$, $\vec{b}$ speichern.

Matrix ***c*** eingeben und speichern:

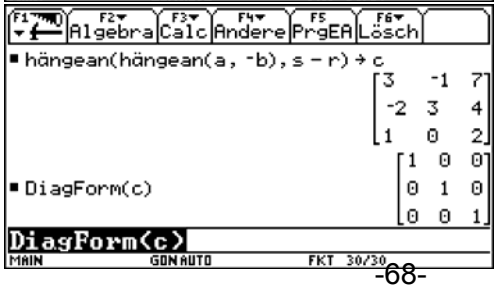
Hängean (Hängean (a , – b) , s – r)) STO▶ ***c*** ENTER ⇒

(2nd Math 4 7)

Gauß-Algorithmus:

DiagForm (c) ENTER ⇒

(2nd Math 4 4)

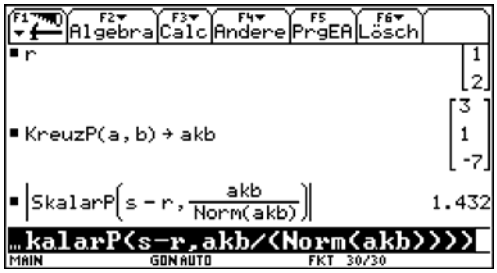


Die Geraden sind windschief. Falls erforderlich, Abstand berechnen (s. nächste Seite!).

Abstand e_w der windschiefen Geraden

Kreuzprodukt berechnen und z. B. unter dem Namen *akb* speichern:

KreuzP (a , b) STO▸ ***akb*** ENTER ⇒
(2nd Math 4 L 2)



Abstand e_w berechnen:

abs (SkalarP (s – r , akb ÷ ***Norm (akb)))***
(2nd Math 4 L 3) (2nd Math 4 H 1)

♦ ENTER ⇒

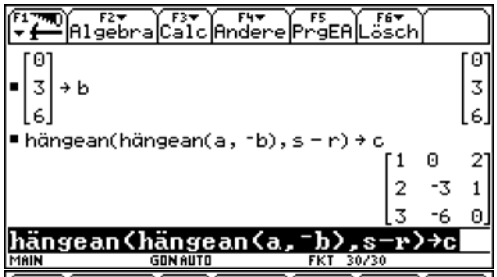
Beispiel 2:

geg.: 2 Geraden $\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{g}_2(v) = \vec{s} + v\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}$

Die vier Vektoren $\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{s}$, $\vec{b}$ speichern.

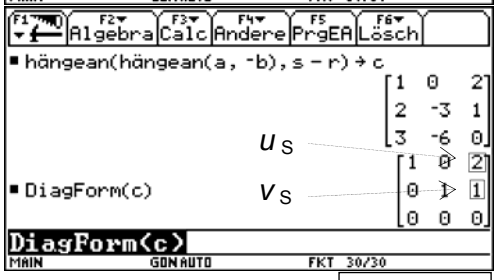
Matrix ***c*** eingeben und speichern:

Hängean (Hängean (a , – b) , s – r) STO▸ ***c*** ENTER ⇒
(2nd Math 4 7)



Gauß-Algorithmus:

DiagForm (c) ENTER ⇒
(2nd Math 4 4)



ggf. u_S , v_S speichern;

Die Geraden schneiden sich. Falls erforderlich, Schnittpunkt berechnen.

Schnittpunkt *S* der Geraden:

$$S = g_1(u_S) \Rightarrow \vec{0S} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{S\,(2;\ 5;\ 8)}$$

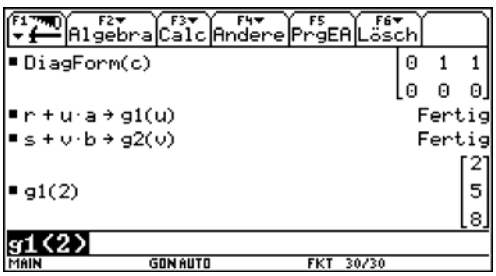
[Kontrolle: $\overset{!}{S} = g_2(v_s) = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{S\,(2;\ 5;\ 8)}$]

(Anm.: Falls auch die Geraden g_1 und g_2 vektoriell als $g_1(u)$ und $g_2(v)$ wie folgt gespeichert wurden,

r + u ⊠ ***a*** STO▸ ***g 1 (u)*** ENTER ⇒

s + v ⊠ ***b*** STO▸ ***g 2 (v)*** ENTER ⇒

kann S direkt über die Eingabe $g_1(2)$ bzw. $g_2(1)$ berechnet werden.)



Beispiel 3:

geg.: 2 Geraden $\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{g}_2(v) = \vec{s} + v \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Die vier Vektoren $\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{s}$, $\vec{b}$ speichern.

Matrix ***c*** eingeben und speichern:

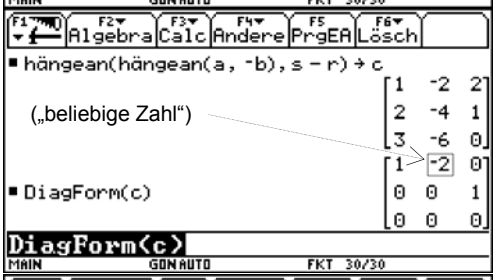
Hängean (Hängean (a , – b) , s – r) STO▸ ***c*** ENTER ⇒

(2nd Math 4 7)

Gauß-Algorithmus:

DiagForm (c) ENTER ⇒

(2nd Math 4 4)



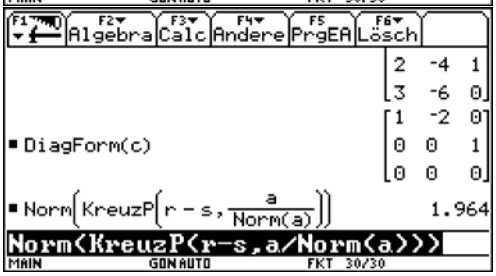
Ergebnis : Die Geraden sind parallel ($\vec{b} = 2\,\vec{a}$).

Falls erforderlich, Abstand berechnen.

Abstand e_p paralleler Geraden

$\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u \cdot \vec{a}$; $\vec{g}_2(v) = \vec{s} + v \cdot \vec{b}$

Norm(KreuzP(r–s, a ÷ Norm(a))) ENTER ⇒



Beispiel 4:

geg.: 2 Geraden $\vec{g}_1(u) = \vec{r} + u \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{g}_2(v) = \vec{s} + v \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Die vier Vektoren $\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{s}$, $\vec{b}$ speichern.

Matrix ***c*** eingeben und speichern:

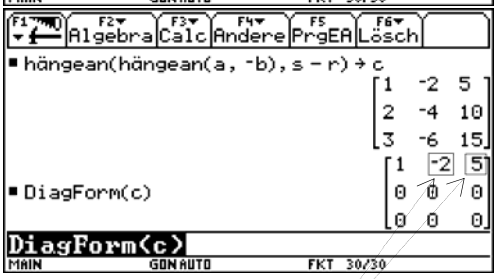
Hängean (Hängean (a , – b) , s – r) STO▸ ***c*** ENTER ⇒

(2nd Math 4 7)

Gauß-Algorithmus:

DiagForm (c) ENTER ⇒

(2nd Math 4 4)



Ergebnis : Die Geraden sind gleich.

(„beliebige Zahl“)

7.5.4 Speichern einer Ebene

(in Parameterdarstellung)

$$\vec{E}(u,v) = \vec{r} + u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\text{geg.:}\quad \vec{E}(u,v) = \vec{r} + u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Speicher u, v müssen leer sein!

- entweder :

  [2 ; 1 ; 4] + u ⊠ [3 ; 2 ; -1] + v ⊠ [3 ; 4 ; -2] STO▸ ***e (u , v)*** ENTER ⇒ Fertig

- oder :

  (häufig ist es zweckmäßig, für anschließende Operationen Orts- und Richtungsvektoren einzeln zu speichern)

[2 ; 1 ; 4] STO▸ ***r*** ENTER ⇒

[3 ; 2 ; -1] STO▸ ***a*** ENTER ⇒

[3 ; 4 ; -2] STO▸ ***b*** ENTER ⇒

r + u ⊠ a + v ⊠ b STO▸ ***e (u , v)*** ENTER ⇒

(Anm.: Die Variablen-Namen r_1 , r_2 , r_3 sind beim TI-V reserviert, können also nicht verwendet werden!)

7.5.5 Punkt P auf der Ebene *E* ? / Abstand Punkt - Ebene / Normalen- und Lotvektor

Es ist zweckmäßig und übersichtlich, die Aufgabe in den folgenden Schritten zu lösen und die Zwischenergebnisse abzuspeichern.

Beispiel 1 geg.: $\vec{E}(u,v) = \vec{r} + u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b}$ (s. o.) ; Punkt P_1 (8 ; 1 ; 4)

Punkt auf Ebene?

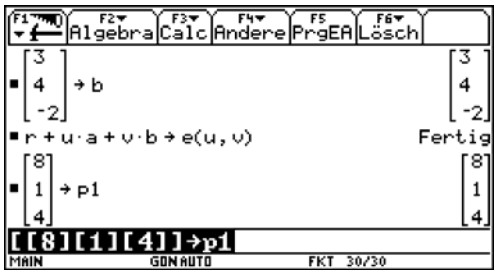
- Vektor $\overrightarrow{OP_1}$ als $\vec{p}_1$ speichern :

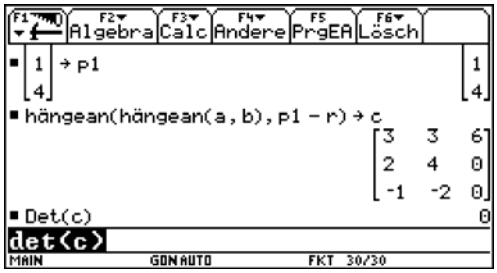
  [8 ; 1 ; 4] STO▸ ***p 1*** ENTER ⇒

- 3 x 3 – Matrix ***c*** aus den Komponenten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}_1 - \vec{r}$ zusammensetzen und speichern :

Hängean (Hängean (a , b) , p 1 – r) STO▸ ***c*** ENTER ⇒
(2nd Math 4 7)

- Determinante von ***c*** prüfen : ***D e t (c)*** ENTER ⇒

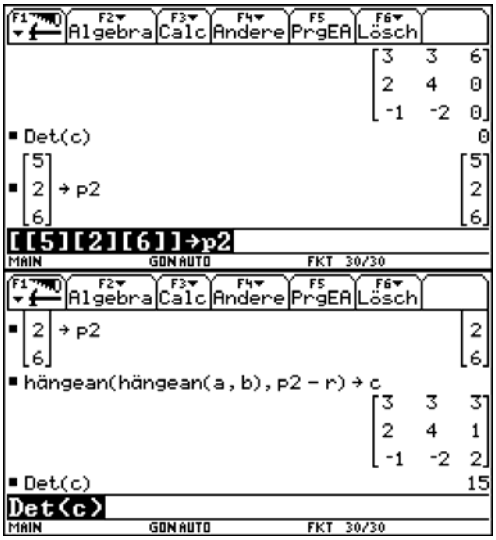




Ergebnis : P_1 liegt auf E , da die Determinante det (***c***) = 0 ist.

(Der Abstand ist also gleich null; zusätzlich könnte noch der Normalenvektor auf der Ebene berechnet werden → s. Bsp. 2, nächste Seite)

Beispiel 2 geg.: $\vec{E}(u,v) = \vec{r} + u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b}$ (s. o.) ; Punkt P_2 (5 ; 2 ; 6)



Punkt auf Ebene?

- Vektor $\overrightarrow{OP_2}$ als $\vec{p}_2$ speichern :

  [5 ; 2 ; 6] STO▸ ***p 2*** ENTER ⇒

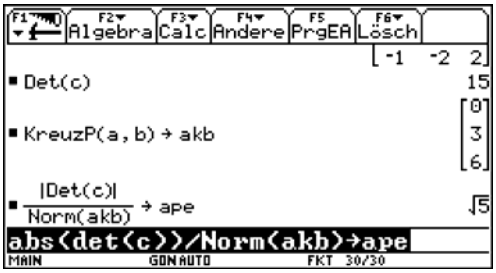
- 3 x 3 – Matrix ***c*** aus den Komponenten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}_2 - \vec{r}$ zusammensetzen und speichern :

Hängean (Hängean (a , b) , p 2 – r) STO▸ ***c*** ENTER⇒
(2nd Math 4 7)

- Determinante von ***c*** prüfen : ***D e t (c)*** ENTER ⇒
  Ergebnis : P_2 liegt NICHT auf E , da die Determinante det (***c***) ≠ 0 ist.

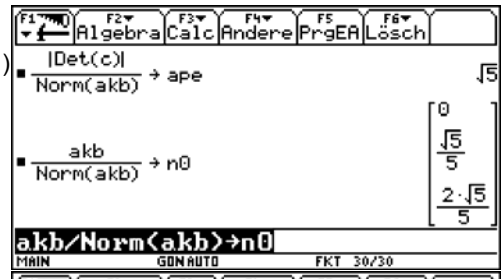
Abstand Punkt - Ebene

- Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ berechnen und (z. B. unter ***akb***) speichern : ***K r e u z P (a , b)*** STO▸ ***akb*** ENTER ⇒
  (2nd Math 4 L 2)
- Abstand berechnen und (z. B. unter ***ape***) speichern :
  a b s (det (c)) ÷ ***N o r m (akb)*** STO▸ ***ape*** ENTER ⇒



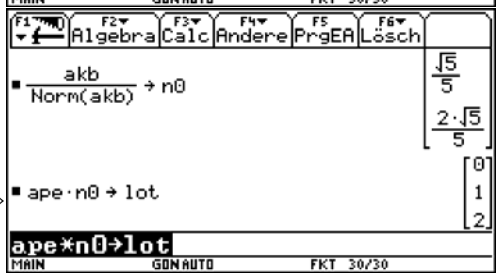
Normalen-Vektor auf der Ebene (z. B. unter ***n0*** speichern)

akb ÷ ***N o r m (akb)*** STO▸ ***n0*** ENTER ⇒
(Dieser Normalen-Vektor ist ein Einheitsvektor)



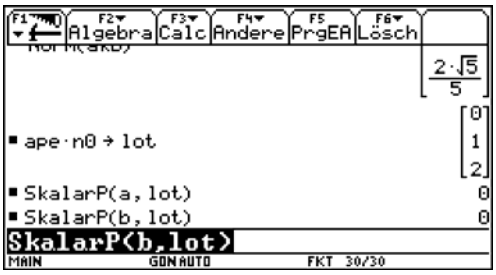
Lot-Vektor (Punkt / Ebene) (z. B. unter ***lot*** speichern)

ape × ***n0*** STO▸ ***lot*** ENTER ⇒



Kontrolle: Der Lotvektor muss senkrecht auf beiden Richtungsvektoren der Ebene stehen; d. h. das zugehörige Skalarprodukt muss gleich null sein.

S k a l a r P (a , lot) ENTER ⇒
S k a l a r P (b , lot) ENTER ⇒
(2nd Math 4 L 3)



7.5.6 Schnittgerade zweier Ebenen

ACHTUNG! Die Speicher *u, v, w, t* müssen leer sein!

Beispiel geg. sind E_1 und E_2 :

$$\vec{E}_1(u,v) = \vec{r} + u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_2(w,t) = \vec{s} + w\cdot\vec{c} + t\cdot\vec{d} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 6 Vektoren ($\vec{r},\vec{a},\vec{b},\vec{s},\vec{c},\vec{d}$) und Ebenen $\vec{E}_1$ als $e1(u,v)$, $\vec{E}_2$ als $e2(w,t)$ speichern.
- Ebenen gleichsetzen. Es ergeben sich 3 Komponentengleichungen für die 4 Unbekannten u, v, w, t. Deshalb wird eine der Unbekannten zusammen mit den Ortsvektoren $\vec{r},\vec{s}$ auf die rechte Seite gebracht, so dass sich ein inhomogenes LGS (3 Gln mit 3 Unbekannten) ergibt, z. B.:

in vektorieller Form : $u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} - w\cdot\vec{c} = \vec{s} - \vec{r} + t\cdot\vec{d}$

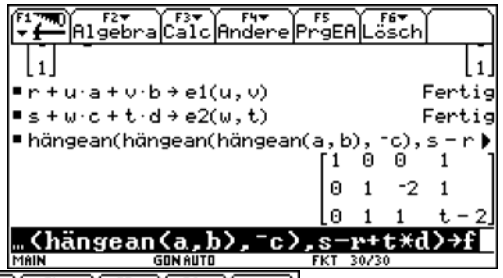
in Komponentenform:
$$a_1u + b_1v - c_1w = s_1 - r_1 + d_1t$$
$$a_2u + b_2v - c_2w = s_2 - r_2 + d_2t$$
$$a_3u + b_3v - c_3w = s_3 - r_3 + d_3t$$

LGS eingeben und lösen (vgl. Kap. 6):

Hängean(Hängean(Hängean(a,b),-c),s–r+t×d)

(2nd Math 4 7)

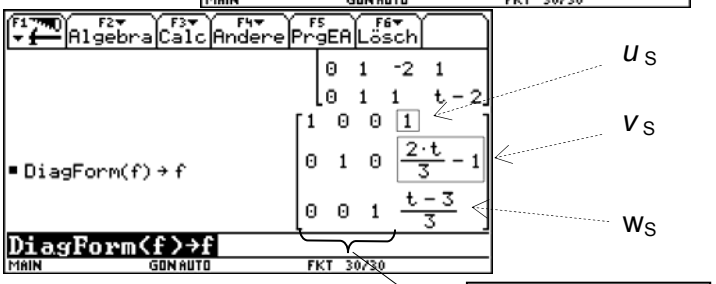
STO▸ ***f*** ENTER ⇒



LGS lösen:

DiagForm (f) STO▸ ***f*** ENTER ⇒
(2nd Math 4 4)

nicht vergessen!



Wichtig! Siehe Anm. 2 nächste Seite!

- u_S und v_S speichern :

f [1 , 4] STO▸ ***us*** ENTER ⇒ 1

f [2 , 4] STO▸ ***vs*** ENTER ⇒ $\frac{2}{3}t - 1$

- Ebenen-Gl $\vec{E}_1$ für u_S und v_S auswerten ⇒ gesuchte Gl der Schnittgeraden:

e 1 (us , vs) ENTER ⇒ $\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{2t}{3} \\ \frac{2t}{3} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

Anm. 1 : Verschiedene Gl-Formen derselben Geraden

Wird statt des Vektors $\vec{c}$ der Vektor $\vec{d}$ auf die linke Seite gebracht, so ergibt sich die Vektorgleichung $u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} - t\cdot\vec{d} = \vec{s} - \vec{r} + w\cdot\vec{c}$ und hieraus nach der beschriebenen Methode die Geradengleichung

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2w+2 \\ 2w+3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}},$$

die dieselbe Gerade beschreibt. (Kontrolle durch Vorgabe von 2 Punkten auf den Geraden oder mit dem unter Abschnitt c) beschriebenen Verfahren .)

Anm. 2 : Versagen des Verfahrens und Abhilfe

Ist (zufällig und nicht ohne weiteres erkennbar) ein Richtungsvektor der Ebene E_1 parallel zu einem Richtungsvektor von E_2 (d. h. auch, dass die beiden Vektoren auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen liegen), so kann der erste Versuch zur Ermittlung der Schnittgeraden scheitern. Dies ist daran zu erkennen, dass die Diagonalform nicht mit der Einheitsmatrix übereinstimmt und dass die anschließend berechnete Geradengleichung keinen Parameter enthält, also nur einen Punkt beschreibt.

Abhilfe : Statt des Vektors $\vec{c}$ wird der Vektor $\vec{d}$ auf die linke Seite gebracht.

Beispiel

$$\vec{E}_1 = \vec{r} + u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{s} + w\cdot\vec{c} + t\cdot\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E_2 ist die x-y-Ebene,
E_1 ist die y-z-Ebene.
Die Schnittgerade ist also die y-Achse.
Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{d}$ sind parallel (hier: gleich).

Das auf der vorigen Seite beschriebene Verfahren liefert

- für $u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} - \underline{w\cdot\vec{c}} = \vec{s} - \vec{r} + \underline{t\cdot\vec{d}}$ (d.h. Vektor $\vec{c}$ auf der linken Seite):

  DiagForm (f) STO▸ ***f*** ENTER (2nd Math 4 4)

  $$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  enthält keinen Parameter

  Abweichungen von der Einheits-Matrix

  $\Rightarrow$ Ergebnis „nicht brauchbar“.

- für $u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} - \underline{t\cdot\vec{d}} = \vec{s} - \vec{r} + \underline{w\cdot\vec{c}}$ (d.h. Vektor $\vec{d}$ auf der linken Seite):

  DiagForm (f) STO▸ ***f*** ENTER (2nd Math 4 4)

  $$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  (enthält Einh.-Matrix und Parameter)

  (weiter wie auf voriger Seite beschrieben . . . ⇓)

  e 1 (us , vs) ENTER

  $$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = y\text{ - Achse}$$

7.5.7 Lage Gerade / Ebene; Schnittpunkt

Beispiel 1

ACHTUNG! Die Speicher *u, v, w* müssen leer sein!

geg. sind die Ebene $\vec{E}$ und die Gerade $\vec{g}$:

$$\vec{E}(u,v) = \vec{r} + u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(w) = \vec{s} + w\cdot\vec{c} \quad = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 5 Vektoren ($\vec{r},\vec{a},\vec{b},\vec{s},\vec{c}$) und die Ebene $\vec{E}$ als $e(u,v)$, die Gerade $\vec{g}$ als $g(w)$ speichern.
- Ebene und Gerade gleichsetzen. Es ergeben sich 3 Komponentengleichungen für die 3 Unbekannten *u*, *v*, *w*. Die drei Richtungsvektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ werden auf die linke Seite gebracht, die beiden Ortsvektoren auf die rechte Seite. Es ergibt sich ein inhomogenes LGS (3 Gln mit 3 Unbekannten). Nur für den *Sonderfall*, dass der Richtungsvektor $\vec{c}$ der Geraden eine *Linearkombination der beiden* Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der Ebene ist, ergibt sich kein Schnittpunkt; d. h. die Gerade verläuft parallel zur Ebene bzw. liegt in der Ebene.

in vektorieller Form : $u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} - w\cdot\vec{c} = \vec{s} - \vec{r}$

in Komponentenform:

$$\begin{aligned} a_1u + b_1v - c_1w &= s_1 - r_1 \\ a_2u + b_2v - c_2w &= s_2 - r_2 \\ a_3u + b_3v - c_3w &= s_3 - r_3 \end{aligned}$$

- LGS eingeben:

Hängean (Hängean (Hängean (a , b) , - c) , s – r) STO▸ ***f***
(2nd Math 4 7)

ENTER ⇒ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- LGS lösen:

DiagForm (f) STO▸ ***f*** ENTER ⇒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 13/8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1/4} \end{pmatrix}$ ← u_S, v_S, w_S
(2nd Math 4 4)
nicht vergessen!

Einheitsmatrix ; anderenfalls Gerade parallel zur Ebene oder in

- w_S speichern :

f [3 , 4] STO▸ ***ws*** ENTER ⇒ – 1 / 4

- Geraden-Gl $\vec{g}$ für w_S auswerten ⇒ gesuchte Koordinaten des Schnittpunkts :

g (ws) ENTER ⇒ $\begin{pmatrix} 17/4 \\ 3/2 \\ 7/4 \end{pmatrix}$ d. h. Schnittpunkt $\underline{\underline{S = (\,17/4\,;\,3/2\,;\,7/4\,)}}$

- Kontrolle : u_S = 13/8 und v_S = –2 in die Ebenengleichung einsetzen:

e (13 ÷ 8 , (-) 2) ENTER ⇒ $\begin{pmatrix} 17/4 \\ 3/2 \\ 7/4 \end{pmatrix}$ ⇒ gleiche S – Koordinaten.

Beispiel 2

geg. sind die Ebene $\vec{E}$ (wie Bsp. 1) und die (neue) Gerade $\vec{g}$ (Richtungsvektor geändert):

$$\vec{E}(u,v) = \vec{r} + u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(w,t) = \vec{s} + w\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- LGS eingeben:

Hängean (Hängean (Hängean (a , b) , - c) , s – r) STO▸ ***f***

(2nd Math 4 7)

ENTER ⇒ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 6 & 5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

- LGS lösen:

DiagForm (f) STO▸ ***f*** ENTER ⇒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$

(2nd Math 4 4)

nicht vergessen!

Gerade verläuft <u>parallel</u> zur Ebene

<u>Keine</u> Einheitsmatrix!

Beispiel 3

geg. sind die Ebene $\vec{E}$ (wie Bsp. 1, 2) und die (neue) Gerade $\vec{g}$ (Ortsvektor geändert):

$$\vec{E}(u,v) = \vec{r} + u\cdot\vec{a} + v\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(w,t) = \vec{s} + w\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- LGS eingeben:

Hängean (Hängean (Hängean (a , b) , - c) , s – r) STO▸ ***f***

(2nd Math 4 7)

ENTER ⇒ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -5 & 7 \\ 6 & 5 & -7 & 11 \end{pmatrix}$

- LGS lösen:

DiagForm (f) STO▸ ***f*** ENTER ⇒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$

(2nd Math 4 4)

nicht vergessen!

Gerade liegt <u>in</u> der Ebene

<u>Keine</u> Einheitsmatrix!

8 Integralrechnung

8.1 Vorbemerkungen

ACHTUNG ! Speicher für x muss leer sein! Ggf. löschen : [2nd] [VAR-LINK] [F1] 1:
(Sonst wird das Integral für den gespeicherten Wert von x ausgewertet.)

Soll die Integrationskonstante c mitgeführt werden, muss auch der Speicher für c leer sein!

ACHTUNG !

- Nicht immer wird eine Lösung gefunden.
- Es werden u. U. Lösungen angegeben, die für Sonderfälle falsch sein können.
- Die Integrationskonstanten (beim unbestimmten Integral) werden nur mitgeführt, wenn dies durch einen besonderen Befehl erzwungen wird.

Hieraus folgt:

Die vom TI-V ermittelten Lösungen sind besonders kritisch zu kontrollieren, z. B.

- beim unbestimmten Integral durch Ableiten der angegebenen Lösung,
- beim bestimmten Integral durch Skizzieren der Aufgabenstellung und überschlägliche Ermittlung einer unteren und einer oberen Schranke
  und / oder Lösen der Aufgabenstellung mit einem Näherungsverfahren (Trapezregel, Simpson).

Ergebnis-Anzeige, Mode EXAKT / APPROX / AUTO

Empfehlung : **AUTO**

Im Mode „AUTO“ versucht der TI-V zunächst, eine exakte Lösung zu ermitteln. Wenn dies nicht möglich ist, wird anschließend eine Näherungslösung angegeben.

Im Mode „EXAKT“ wird nur eine exakte Lösung ermittelt. Falls dies nicht möglich ist, wird keine Lösung angegeben.

Im Mode „APPROX“ wird nur eine Lösung in einem „genäherten Format“ angegeben. Diese Ergebnisdarstellung ist häufig unübersichtlich und schwer zu deuten.

Im Mode „APPROX“ (oder wenn im Mode „ AUTO “ die Lösung im genäherten Dezimalformat erzwungen wird) kann die Lösung in besonderen Fällen auch falsch sein. Dies wird häufig durch die Meldung

„ Genauigkeit ist unsicher “

am unteren Rand des Bildschirms angezeigt. Der Grund für eine solche Meldung muss also unbedingt geklärt werden (z. B. liegt im betrachteten Bereich eine Polstelle oder eine Asymptote). Siehe hierzu auch das Beispiel im Kap. TR 8.4.1 c).

8.2 Unbestimmte Integrale

(Speicher für x und c müssen leer sein!)

a) Eine Stammfunktion ermitteln (OHNE Integrationskonstante)

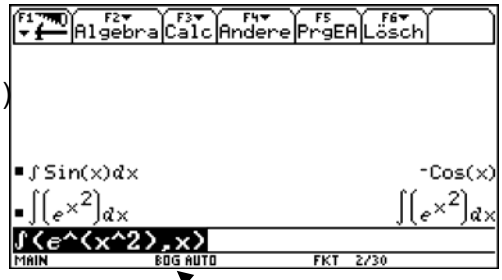
- $\int \sin x\,dx = ?$ [2nd] [∫] ([SIN] (x) [,] x) ⇒

  oder: [F3] 2

$\int e^{x^2}\,dx = ?$ [2nd] [∫] ([2nd] [e^x] (x [^] 2) [,] x) ⇒ s.o.

oder: [F3] 2

Der TI-V kann hier keine Stammfunktion finden, da der Ausdruck nicht elementar integrierbar ist.



Wichtig bei Integration trigonometrischer Funktionen

b) Eine Stammfunktion ermitteln (MIT Integrationskonstante) (Speicher für c muss leer sein!)

- $\int \sin x \, dx = ?$ [2nd] [∫] ([SIN] (***x***) , ***x*** , ***c***) ⇒ c – Cos (x)

  oder: [F3] 2

  Im Allg. lohnt sich der Aufwand für die erweiterte Eingabe nicht (c selbst ergänzen!).

c) Unerwartete Umformungen

In einigen Fällen, Insbesondere bei Integranden, die logarithmische oder inverse trigonometrische Funktionen enthalten, kann das Ergebnis in unerwarteter Form angezeigt werden. Deutung und Kontrolle des Ergebnisses werden zusätzlich dadurch erschwert, dass unbestimmte Integrale eine beliebige Konstante enthalten. Beispiel:

- $\int \ln(5x) \, dx = ?$ „Handrechnung“ : $\int \ln(5x) \, dx = x \ln(5x) - x$

  ⇕

  TI-V:

  [2nd] [∫] ([LN] (***5 x***) , ***x***) ⇒
  - x ln (x) + (ln(5) – 1) x „AUTO“, „EX.“
  - x ln (x) + .609 x „APPROX“

  Mit der Beziehung ln (5 x) = ln 5 + ln x lassen sich die Ausdrücke ineinander überführen.

d) Mehrfaches Integrieren

Bei manchen Aufgabenstellungen soll die gesuchte Funktion y aus einer höheren Ableitung $y^{(n)}$ ermittelt werden. Hierzu muss die gegebene Ableitung n -mal integriert werden. Beispiel: Ermittlung der Biegelinie w aus der Momentenlinie M :

$$w'' = -\frac{M(x)}{E\,I} \;\Rightarrow\; w = -\int\int \frac{M(x)}{E\,I}\,dx\,dx$$

Im Allg. ist es sinnvoll, die Integration in 2 Schritten vorzunehmen. Zunächst wird w' durch einmalige Integration von w'' als Funktion von x ermittelt und abgespeichert (da häufig Randbedingungen auch für w' auszuwerten sind!) , anschließend entsprechend w aus w' integriert (und abgespeichert).

Es ist jedoch auch möglich, mehrfache Integrationen in einem einzigen Schritt auszuführen, wahlweise auch unter Einschluss der Integrationskonstanten. Ein einfaches Beispiel:

- $\int\int x \, dx \, dx = ?$ „Handrechnung“ : $\int\int x \, dx \, dx = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$

  TI-V: 2 unabhängige Konstanten, c und d (leere Speicher !)

  [2nd] [∫] ([2nd] [∫] (***x*** , ***x*** , ***c***) , ***x*** , ***d***) ⇒ $\frac{x^3}{6} + c \cdot x + d$

  (Insgesamt gewöhnungbedürftig und unübersichtlich !)

8.3 Einige Probleme

(Speicher für x und c müssen leer sein!)

Da die Integralrechnung im Vergleich mit der Differentialrechnung sehr viel schwieriger ist und da es keine Regeln gibt, die stets in allen Fällen zum Erfolg führen, gibt es beim TI-V erwartungsgemäß immer wieder unvollständige oder fehlerhafte Ergebnisse. Wie bereits angesprochen, sind die Kontrollen bei der Integralrechnung besonders sorgfältig durchzuführen. Im Folgenden werden einige Problembeispiele besprochen.

a) Einfluss der Form des Integranden

- $\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx}_{\text{1. Form}} = \underbrace{\int \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}}\, dx}_{\text{2. Form}} = ?$ Lösung : $\arcsin\left|\frac{x}{r}\right| + c$

⇕

TI-V: (verkürzte Schreibweise)

1. Form: $\int (1 / \sqrt{}(r \text{ ^ } 2 - x \text{ ^ } 2), x, c) \Rightarrow \sin^{-1}\left(x\left|\frac{1}{r}\right|\right) + c$ (richtig)

2. Form: $\int (\sqrt{}(1 / (r \text{ ^ } 2 - x \text{ ^ } 2)), x, c) \Rightarrow \int \sqrt{\frac{-1}{x^2 - r^2}}\, dx + c$ (keine Lösg.)

b) Lösung für Sonderfälle nicht richtig

- $\int x^n\, dx = ?$ Lösung : $\int x^n\, dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c & (\text{für } n \neq -1) \\ \ln|x| + c & (\text{für } n = -1) \end{cases}$

⇕

TI-V: (verkürzte Schreibweise)

$\int (x \text{ ^ } n, x, c) \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ***Lösung für n = – 1 FALSCH !***

Auch für das entsprechende bestimmte Integral ergeben sich Fehler und Widersprüche:

- $\int_a^b x^n\, dx = ?$ Lösung : $\int x^n\, dx = \begin{cases} \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} & (\text{für } n \neq -1) \\ \ln|b| - \ln|a| & (\text{für } n = -1) \end{cases}$

TI-V: (verkürzte Schreibweise ; Speicher a , b leer !)

$\int (x \text{ ^ } n, x, a, b) \Rightarrow \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$ ***Lösung für n = – 1 FALSCH !***

Für die untere Grenze a = 0 (obere Grenze b = beliebig) ergibt sich mit dem TI-V:

$\int (x \text{ ^ } n, x, 0, b) \Rightarrow$ undef „***Widerspruch" zu vorangeg. Ergebnis !***

c) TI-V zeigt kein Ergebnis, obgleich eine Lösung existiert

- $\int (1 + 2x^2)\, e^{(x^2)}\, dx = ?$ Lösung : $x\, e^{(x^2)} + c$

TI-V: (verkürzte Schreibweise)

$\int ((1 + 2 x \text{ ^ } 2)\, e \text{ ^ } (x \text{ ^ } 2), x, c) \Rightarrow 2 \cdot \int (x^2 \cdot e^{(x^2)})dx + \int (e^{(x^2)})dx + c$

TI – V findet die Lösung nicht !

8.4 Bestimmte Integrale und Flächenberechnungen

(Speicher für x muss leer sein!)

8.4.1 Allgemeines

Bestimmte Integrale	Flächenberechnung
Positive und negative Anteile werden *mit ihrem Vorzeichen* „automatisch“ berücksichtigt.	Es müssen zunächst die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse bzw. mit der 2. Kurve ermittelt werden. Die einzelnen Flächen-Anteile müssen dann *betragsmäßig* addiert werden.

Syntax

- $\int_a^b f(x)\,dx = ?$ **2nd [∫] (** *„Funktion von x"* **, x , a , b)** ENTER

  oder: F3 2

  a: untere Grenze; b: obere Grenze

8.4.2 Bestimmte Integrale

a) Einfache Beispiele

- $\int_0^2 x^2\,dx = ?$ **2nd [∫] (x ^ 2 , x , 0 , 2)** ⇒ 8 / 3 bzw. 2.667

Anstelle von Zahlen können auch Variablennamen als Grenzen verwendet werden.
Sind die entsprechenden Speicher (hier: a und b) leer, ergibt sich:

- $\int_a^b x^2\,dx = ?$ **2nd [∫] (x ^ 2 , x , a , b)** ⇒ $\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

Sind die Speicher für a und b belegt, wird das Integral für diese Zahlen ausgewertet.

b) Nicht elementar integrierbare Integrale (bzw. Integrale, für die der TI-V keine exakte Lösung findet)

- $\int_{-1}^2 e^{x^2}\,dx = ?$ (ist nicht elementar integrierbar; vgl. S. 8.2)

2nd [∫] (2nd [e^x] (x ^ 2) , x , (-) 1 , 2)

Findet der TI-V keine Lösung, so gibt er
im Mode „ EXAKT “ das ungelöste Integral zurück;
im Mode „ AUTO, APPROX “ wird eine numerische Integration durchgeführt.

⇒
- $\int_{-1}^2 \left(e^{x^2}\right) dx$ „ EXAKT “
- 17.92 „ AUTO, APPROX “

c) Integrale mit unendlichen Integrationsgrenzen (uneigentliche Integrale)

- $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = ?$ **2nd [∫] (1 ÷ x , x , 1 , ∞)**

  2nd J

Die Lösung „∞ “ ist richtig, da die Stammfunktion $y = \ln x$ für $x \to \infty$ keinen Grenzwert hat.

⇒
- ∞ „ AUTO, EXAKT “
- 34.45 „ APPROX “, „AUTO“ mit ♦ ENTER — ***FALSCH !!***

Auch in diesem Fall erweist sich die Einstellung „ AUTO " als vorteilhaft.

(Man beachte die Warnmeldung „ Genauigkeit ist unsicher “.)

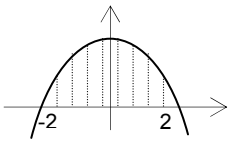
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = ?$ **2nd [∫] (1 ÷ x ^ 2 , x , 1 , ∞)**

Die Lösung ist richtig, da die Stammfunktion $y = -1/x$ für $x \to \infty$ den Grenzwert 0 hat. ⇒ { 1 „ AUTO, EXAKT “ ; 1.000 „ APPROX “ }

Stets mit Skizze !

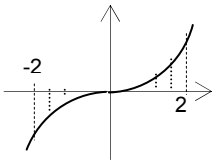
8.4.3 Flächenberechnungen

a) Fläche zwischen einer Kurve und der x – Achse



- Gesucht ist die Fläche, die die Kurve $y = 4 - x^2$ mit der x-Achse einschließt.
  1.) Nullstellen bestimmen: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \; ; \; x_2 = +2$
  2.) Fläche berechnen:
  TI-V (vereinfachte Schreibweise): **∫ (4 − x ^ 2 , x , (-) 2 , 2)** ⇒ 10.67 bzw. 32/3

- Gesucht ist die Fläche, die die Kurve $y = x^3/4$ im Intervall $[-2 \; ; \; 2]$ mit der x-Achse einschließt.

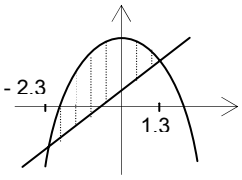


  1.) Nullstellen bestimmen: $x^3/4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$
  2.) Fläche berechnen: Die Teilflächen von $x = -2$ bis 0 und von 0 bis +2 haben unterschiedliche Vorzeichen, sind wegen der Antimetrie jedoch betragsmäßig gleich groß. Hieraus folgt:

$$-A_1 = -\int_{-2}^{0} \frac{x^3}{4}dx \;=\; A_2 = \int_0^2 \frac{x^3}{4}dx \quad \text{und somit} \quad A = |A_1| + A_2 = 2A_2 = 2\int_0^2 \frac{x^3}{4}\,dx$$

TI-V (vereinfachte Schreibweise): **2 ∫ (x ^ 3 / 4 , x , 0 , 2)** ⇒ 2

b) Fläche zwischen zwei Kurven



- Gesucht ist die Fläche, die die Kurven $y_1 = 4 - x^2$ und $y_2 = x + 1$ einschließen.
  1.) Schnittpunkte bestimmen: $4 - x^2 = x + 1$
  $\Rightarrow x_1 = -2{,}30 \; ; \; x_2 = +1{,}30$
  2.) Fläche berechnen:

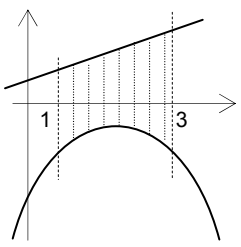
$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (y_1 - y_2)\,dx \right|$$

(wegen der Betragszeichen ist die Reihenfolge $y_1 - y_2$ bzw. $y_1 - y_2$ beliebig. Zur besseren Kontrolle sollte jedoch die im betrachteten. Intervall größere Funktion (hier: y_1) vorn stehen. Dann muss das Ergebnis auch ohne Betragszeichen positiv sein.)

TI-V (vereinfachte Schreibweise)

∫ ((4 − x ^ 2) − (x + 1) , x , (-) 2.30 , 1.30) ⇒ 7.812

- Gesucht ist die Fläche, die die Kurven $y_1 = \frac{1}{2}x + 1$ und $y_2 = -x^2 + 4x - 5$ im Intervall $[1 \; ; \; 3]$ einschließen.



  1.) Schnittpunkte bestimmen: kein Schnittpunkt vorhanden (s. Skizze)
  2.) Fläche berechnen:

$$A = \int_1^3 \left[(\tfrac{1}{2}x + 1) - (-x^2 + 4x - 5) \right] dx$$

TI-V:

∫ ((x / 2 + 1) − ((-) x ^ 2 + 4 x − 5) , x , 1 , 3) ⇒ 6.67 bzw. 20/3

8.4.4 Bestimmte Integrale / Flächenberechnung im Graphik - Modus

[♦] [GRAPH]
[F5] **7**
(s. auch TR-Kap. 4.4)

Da es zur groben Orientierung erforderlich ist, die Situation in einer Skizze zu veranschaulichen, und da bei Flächenberechnungen außerdem Schnittpunkte zu bestimmen sind, ist es äußerst hilfreich, die Aufgabe im Graphik-Modus zu lösen.

Es muss allerdings darauf hingewiesen werden, dass die Integration im Graphik-Modus stets numerisch, d. h. näherungsweise durchgeführt wird. In Sonderfällen, z. B. bei der Integration in Bereichen mit Polstellen und Asymptoten, erscheint deshalb auch wieder die Meldung

„ Genauigkeit ist unsicher " !

Ferner ist zu beachten, dass bei dieser Methode das *bestimmte Integral* ermittelt wird. Soll die *Fläche* bestimmt werden, so müssen zunächst wieder die Schnittpunkte (Ermittlung im Graphik-Modus vgl. TR-Kap. 4.4) und die Beträge der Teilflächen berechnet werden.

a) Allgemeine Vorgehensweise

- Funktion(en) $f(x)$ eingeben. Hierzu werden zweckmäßig die Funktionsspeicher *y1* bis *y99* verwendet ([♦] [Y=]).
- Window-Bereich einstellen (ggf. später korrigieren)
- Funktion(en) mit [♦] [GRAPH] zeichnen (ggf. Window-Bereich korrigieren)
- ggf. Nullstellen bzw. Schnittpunkte der Kurven mit [F5] **2** bzw. [F5] **5** ermitteln

[F5] **7:** ($\int f(x)\,dx$) ermittelt den Wert eines bestimmten Integrals in einem vorzugebenden Intervall: (NICHT: die Fläche unter einer Kurve)

Anzeige: Unter Grenze ? (= untere Grenze des Intervalls)
xc : . . . . . yc : . . . . . .

- Die untere Grenze des Intervalls (Nullstelle bzw. Schnittpkt) ENTWEDER direkt über die Tastatur ODER mit Hilfe des Cursors jeweils mit [ENTER] eingeben

Anzeige: Obere Grenze ? (= obere Grenze des Intervalls)
xc : . . . . . yc : . . . . . .

- Die obere Grenze des Intervalls (Nullstelle bzw. Schnittpkt) ENTWEDER direkt über die Tastatur ODER mit Hilfe des Cursors jeweils mit [ENTER] eingeben

Anzeige: $\int f(x)\,dx$ = ... (Wert des Integrals)

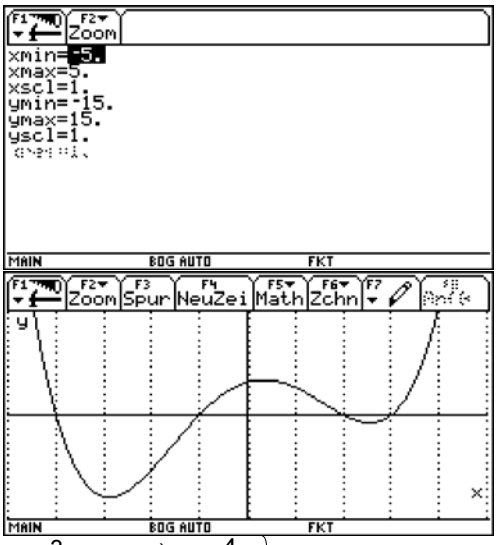
(Die Fläche zwischen der Kurve und der x – Achse wird schraffiert dargestellt; aber Vorsicht: im Allg. ist der Wert des Integrals ungleich dem Wert der schraffierten Fläche!)

Löschen der Schraffur mit **F 4** (NeuZei) ⇒ Kurve wird neu gezeichnet

Bei mehreren Kurven auf dem Bildschirm: s. Anm. TR-Kap. 4.4 unter [F5] 5 (sinngemäß)

b) Zusammenfassendes Beispiel

Gesucht ist die Fläche, die die Kurve
$y = 1/5\,(x^4 - 15x^2 + 10x + 24)$ mit der x-Achse einschließt.



- Funktion eingeben: ♦ [Y=] , Gleichung eingeben
  hier gew.: $y_1(x)$
- Graphik vorbereiten: ♦ [WINDOW]
  Bildschirm-Einstellung vorgeben
  (ggf. später verbessern)
- Graph darstellen: ♦ [GRAPH]
  (ggf. Bildschirm-Einstellung verbessern)
- Nullstellen ermitteln: F5 2 :

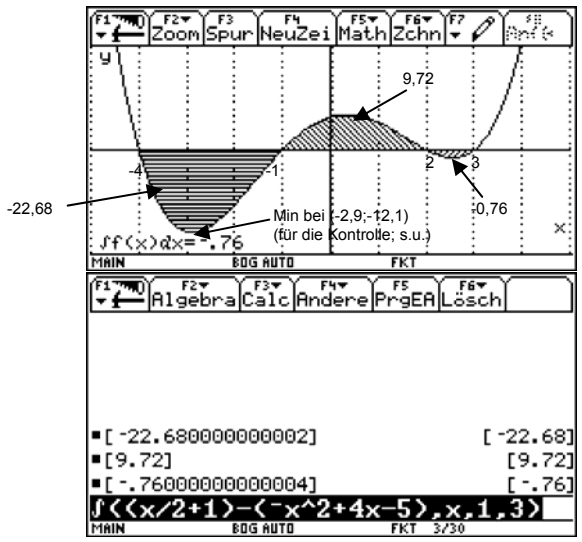
unter Grenze:		obere Grenze:		
– 5		– 3	⇒	– 4
– 3		0	⇒	– 1
1		3	⇒	2
2,5		4	⇒	3

} 4 Nullstellen

- Teilflächen zwischen den einzelnen Nullstellen ermitteln: F5 7 :

  unter Grenze: – 4 obere Grenze: – 1 ⇒ – 22.68 (erste Teilfläche ; < 0, da unterhalb
  (zweckmäßig mit ♦ H in den Hauptbildschirm übertragen) x-Achse)

  unter Grenze: – 1 obere Grenze: 2 ⇒ 9.72 (ggf. wieder ♦ H)
  unter Grenze: 2 obere Grenze: 3 ⇒ – 0.76 (ggf. wieder ♦ H)



- Gesamt-Fläche bzw. bestimmtes Integral berechnen:

  Mit ♦ [CALC HOME]
  zum Hauptbildschirm zurück

  Gesamt-Fläche A zwischen Kurve und x-Achse

  $$A = |-22.68| + 9.72 + |-.76| = \underline{33{,}16 \text{ FE}}$$

  Das bestimmte Integral im Intervall $[-4\ ;\ 3]$

  $\int_{-4}^{3} \frac{1}{5}(x^4 - 15x^2 + 10x + 24)\,dx$ ergibt sich hingegen zu

  TI-V: ∫ (**y1 (x)** , **x** , (-) **4** , **3**) ⇒ – 13.72 ($\overset{!}{=}$ – 22,68 +9.72 – 0.76 = – 13.72)
  (anfangs gew. Fkt-Name)

- Kontrolle der Größenordnung

  Für die Fläche zwischen einer parabelförmig gekrümmten Kurve und der x-Achse gilt näherungsweise:

  $$A \approx 2/3 \text{ Grundseite x Höhe}$$

  (Für den symmetrischen Bogen einer Parabel 2. Grades gilt diese Formel exakt; vgl. Statik, Überlagerungstabellen des Kraftgrößenverfahrens, Rechteck mit Parabel)

  Hier z. B. für die erste Teilfläche: $|A_1| = 22{,}68 \overset{!}{\approx} \frac{2}{3}(4 - 1)\,12{,}1 = 24{,}2$ ist erfüllt.

9 Beschreibende Statistik

9.1 Grundlagen

9.1.1 Arbeiten im Hauptbildschirm

Kumulierte Summen: kumSum({1,2,3,4,5}) ENTER ⟶ {1 3 6 10 15}

Bei einer Matrix erhält man die kumulierte Summe der Spalten von oben nach unten:

[1,2;3,4;5,6] STO▶ m1 ENTER
kumSum (m1) ENTER ⟶

arithmetischer Mittelwert:

Mittelw({1,2,3,4,5}) ENTER ⟶ 3

gewichteter arithmetischer Mittelwert:

Mittelw ({1,2,3,4,5},{2,3,1,2,3}) ENTER ⟶ 34/11

Medianwert: Median ({1,2,3}) ENTER ⟶ 2
Median ({1,2,3,4}) ENTER ⟶ 5/2

Standardabweichung: Stdabw({1,2,3}) ENTER ⟶ 1

gewichtete Standardabweichung:

Stdabw ({1,2,3},{3,2,1}) ENTER ⟶ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Varianz: Varianz({1,2,3}) ENTER ⟶ 1

gewichtete Varianz: Varianz ({1,2,3},{3,2,1}) ENTER ⟶ 5/2

Sortierung von Listen:{2,1,4,3} STO▶ list1 ENTER ⟶{2,1,4,3}
aufsteigend SortAufw list1 ENTER ⟶ Fertig
list1 ENTER ⟶ {1,2,3,4}

Bei Angabe von mehr als einer Liste werden die Elemente der zusätzlichen Listen so sortiert, dass ihre neue Position mit der neuen Position der Elemente der ersten Liste übereinstimmt.

{4,3,2,1} STO▶ list2 ENTER ⟶{4,3,2,1}
SortAufw list2,list1 ENTER ⟶ Fertig
list2 ENTER ⟶ {1,2,3,4}
list1 ENTER ⟶ {4,3,2,1}

bei **absteigender** Sortierung lautet der Befehl
SortAbw (sonst wie oben)

Binomialkoeffizienten: Kombinat(n,m) ENTER ⟶ $\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$

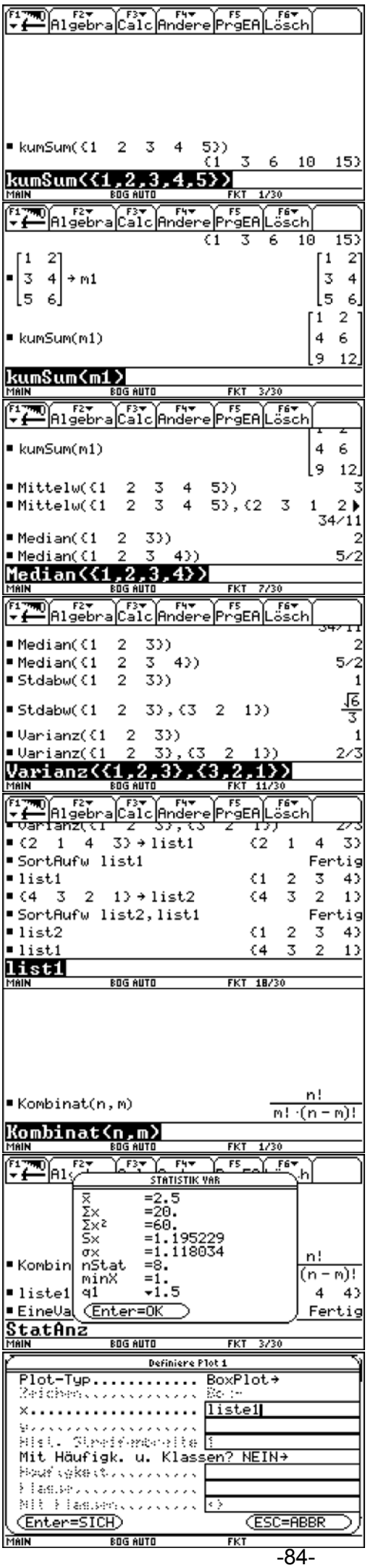
Beschreibende Statistik ohne Klasseneinteilung

diverse Kennzahlen einer Stichprobe bestimmen:

{1,1,2,2,3,3,4,4} STO▶ liste1 ENTER
⟶ { 1 1 2 2 3 3 4 4 }
EineVar liste1 ENTER ⟶ Fertig
StatAnz ENTER ⟶

Eine Stichprobe als Boxplot darstellen:

1) Abspeichern einer Stichprobe in einer Liste
{6,5,3,3,2,2,1} STO▶ liste1 ENTER
⟶{6 5 3 3 2 2 1 }
2) MODE Graph……..FUNCTION ENTER (ist i.a. eingestellt !)
3) ◊ Y= Eventuell vorhandene alte Darstellungen (Plots) löschen (oder mit F4 deaktivieren. Plots werden im Fenster ◊ Y= vor den



Funktionen eingegeben. Auch alle in diesem Fenster angezeigten Funktionen deaktivieren; z.B. mit F4 oder mit F5 3: Funktionen aus

4) Den gewünschten Plot z.B. Plot1 mit dem Cursor anfahren. Mit F3 das Dialogfenster öffnen und wie angegeben ausfüllen:

5) Fenstervariablen einstellen: ◊ WINDOW

6) Box-Plot anzeigen: ◊ GRAPH ⟶

7) Untersuchungen am Boxplot: F3 Mit dem Cursor (rechts und links) kann im Box-Plot umhergesprungen werden. Es werden dann angezeigt:

minX	: Kleinstes Element der Stichprobe
q1	: 1. Quartil
Mittel	: Median
q3	: 3. Quartil
maxX	: Größtes Element der Stichprobe

Eine **Stichprobe als Histogramm** darstellen:

Die Punkte 1) – 3) wie oben

4) Den gewünschten Plot z.B. Plot1 mit dem Cursor anfahren. Mit F3 das Dialogfenster öffnen und wie nebenstehend ausfüllen:

5) Fenstervariablen einstellen: wie oben

6) Box-Plot anzeigen: ◊ GRAPH ⟶

7) Mit F3 und dem Cursor (rechts und links) kann man sich Werte anzeigen lassen.

Beschreibende Statistik mit Klasseneinteilung

Eine **Stichprobe mit Klasseneinteilung eingeben und speichern**:
Bei einer Stichprobe treten die Ereignisse bzw. Klassen {1,2,3,4,5,6} mit den Häufigkeiten {0,1,2,0,2,1} auf:

{1,2,3,4,5,6} STO▶ klassen ENTER ⟶ { 1 2 3 4 5 6 }
{0,1,2,0,2,1} STO▶ oft ENTER ⟶ { 0 1 2 0 2 1 }

diverse Kennzahlen einer Stichprobe bestimmen:
für die obige Stichprobe erhält man
EineVar klassen,oft ENTER ⟶ Fertig
StatAnz ENTER ⟶

Eine Stichprobe als **Streu-Plot oder xy-Linie** darstellen:

1) Abspeichern einer Stichprobe in zwei Listen
(siehe oben)

2) MODE Graph……..FUNCTION ENTER

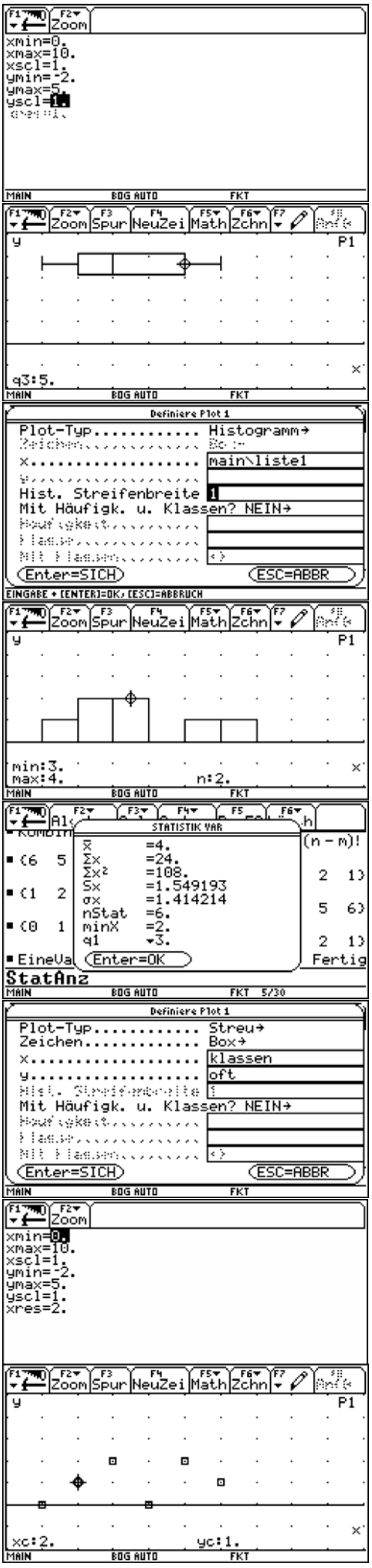
3) ◊ Y= Eventuell vorhandene alte Darstellungen (Plots) löschen (oder mit F4 deaktivieren. Plots werden im Fenster ◊ Y= vor den Funktionen eingegeben. Auch alle in diesem Fenster angezeigten Funktionen deaktivieren; z.B. mit F4 oder mit F5 3: Funktionen aus

4) Den gewünschten Plot z.B. Plot5 mit dem Cursor anfahren. Mit F3 das Dialogfenster öffnen und wie nebenstehend ausfüllen:

5) Fenstervariablen einstellen: ◊ WINDOW

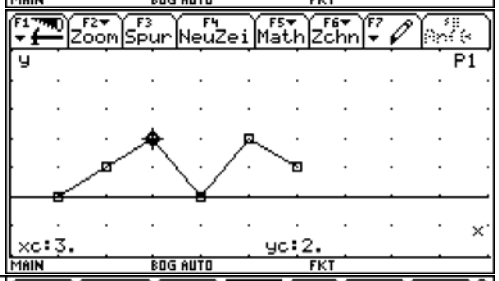
6) Plot anzeigen: ◊ GRAPH ⟶

7) Untersuchungen am Streu-Plot: F3 Mit dem Cursor (rechts und links) kann im Streu -Plot umhergesprungen werden. Es werden dann die Werte und Häufigkeiten angezeigt:



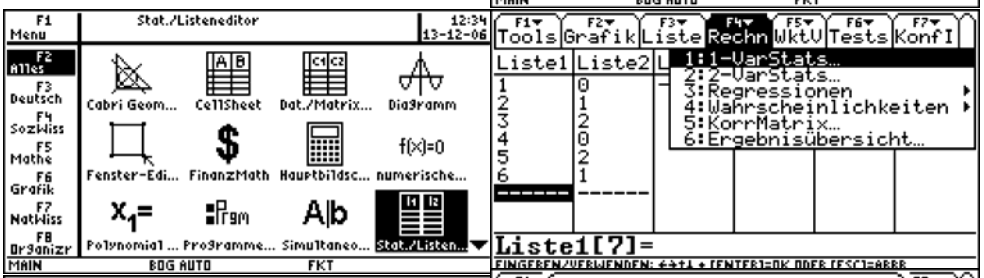
Bei der Darstellung als **xy-Linie** wird bei ◊ Y= mit F3 das Dialogfenster wie folgt ausgefüllt:

Mit ◊ GRAPH erhält man dann den folgenden Plot, bei dem man sich mit F3 die Werte anzeigen lassen kann:

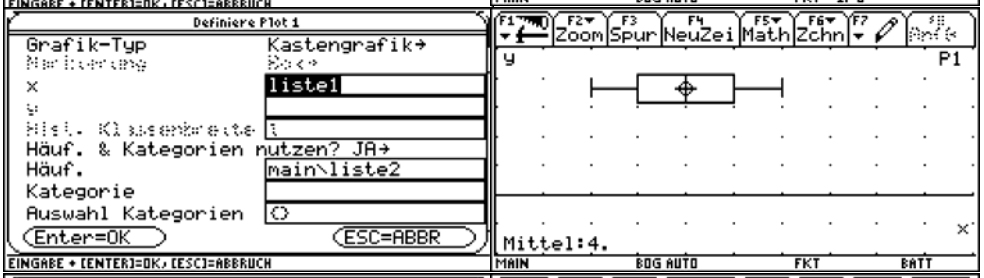


9.1.2 Arbeiten mit Apps Stat./Listen

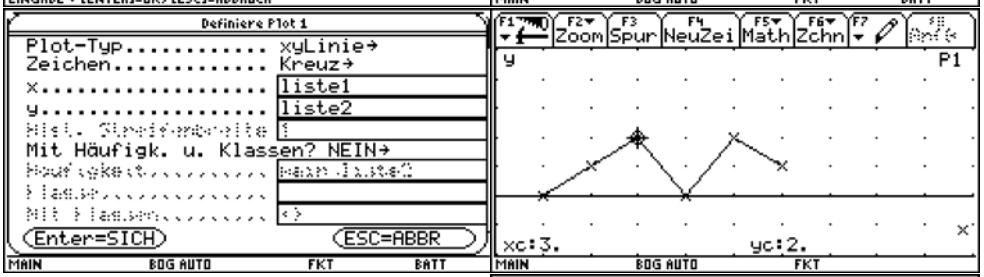
Die Eingabe der Listenwerte geht einfacher mit Apps Stat./Listen. Die Messwerte trägt man in Liste1, Liste2,.. ein und bekommt mit F4 1 die Kennwerte der beschreibenden Statistik.



Mit Hilfe von F2 1 (Gafik einstellen) kann man wie oben gezeigt, unter F1 den Grafiktyp einstellen. Hier z.B. Boxplot (Kastengrafik). Mit ◊ GRAPH wird dann die Grafik angezeigt.



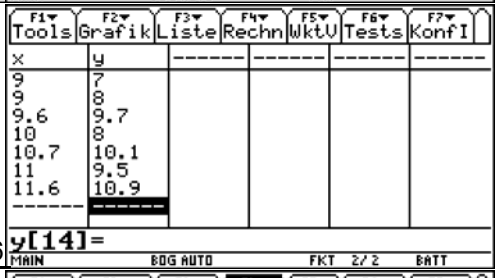
Je nachdem von welcher Stelle man in die Wahl des Grafik-Typs kommt heißen die Grafiken etwas anders (x-y-Polygonzug-xyLinie, Kastengrafik-Boxplot,...)



9.2 Regression

Berechnen Sie zu den beiden Messreihen die beiden linearen Regressionsgeraden und den Korrelationskoeffizienten und stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar:

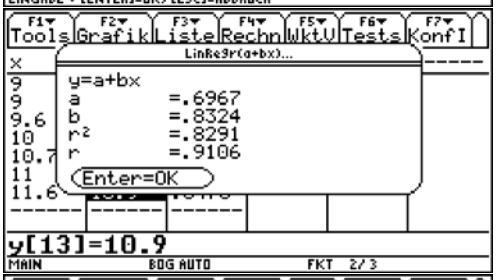
xi	4,9	6,0	7,0	7,0	7,5	8,0	9,0	9,0	9,6	10,0	10,7	11,0	11,6
yi	4,6	6,5	5,5	6,4	8,0	7,5	7,0	8,0	9,7	8,0	10,1	9,5	10,9



1) Vor Eingabe dieser Werte löscht man am besten mit F1 8 alle alten Eingabewerte und kann dann auch problemlos die Variablennamen x und y eingeben.
2) Unter F4 Regression kann man dann unterschiedliche Regressionstypen auswählen. Hier 2: LinRegr(a+bx)

3) Man kann hier auch angeben, wo die Gleichung der ersten Regressionsgeraden hingespeichert werden soll. Hier in y1(x)

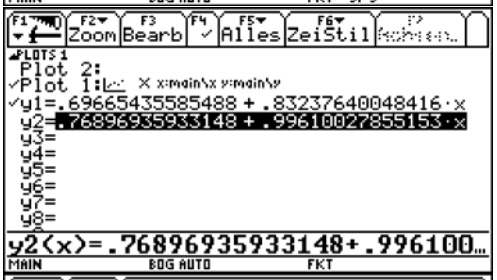
Man erhält als erste Regressionsgerade:



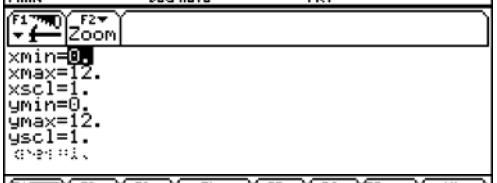
4) Mit ENTER kommt man wieder in den Listeneditor. In einer neunen Spalte werden die Residuen angegeben.
5) Um an die zweite Regressionsgerade zu kommen, wählen Sie im Listeneditor wieder mit F4 2 die lineare Regression und speichern Sie Gleichung der zweiten Regressionsgeraden in y2(x)

   Man beachte, dass hier x und y vertauscht sind. Um gleich die richtige Darstellung in einem Achsenkreuz zu erhalten, muss als y2(x) diese Gleichung nach x aufgelöst werden (Inverse Funktion).

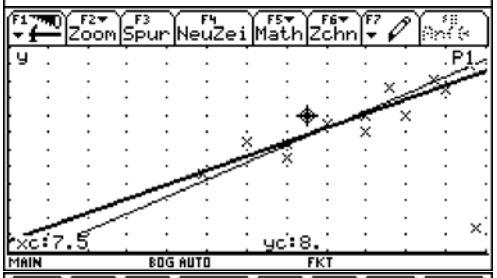
6) Graphische Darstellung der Ergebnisse:
   Wählen Sie im Listeneditor F2 1 (Grafik einstellen) den Plot Setup-Bildschirm auf. Eventuell vorhandene alte Darstellungen (Plots) löschen (oder mit F4 deaktivieren. Mi F1 z.B.Plot1 für die Darstellung der Messpunkte definieren.
7) Aktivieren Sie mit ◊ Y= den Funktionseditor. Wählen Sie bei y1 mit F6 2 als Anzeigestil „Dick“ und deaktivieren Sie das zeichnen von y2



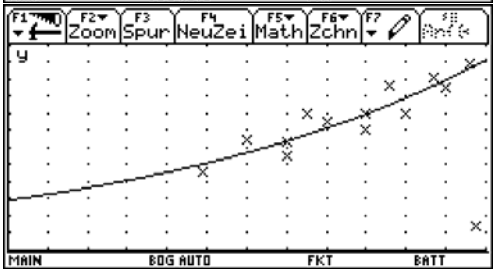
8) Wählen mit ◊ WINDOW als Fenstervariable z.B.:



9) Erzeugen Sie mit ◊ GRAPH einen Plot und wählen dann bei F6 3 (Zeichnen Inverse). Da bei der zweiten Regressionsgeraden x und y vertauscht wurden, muss jetzt die nach x aufgelöste Funktion (Inverse) gezeichnet werden. Geben Sie als Funktion y2(x) ein. Man erhält dann den nebenstehenden Plot, bei dem man sich mit F3 die Werte anzeigen lassen kann:



Wählt man als Typ für die Regression z.B.. ExpRegr, und speichert das Ergebnis unter y3(x), so erhält man mit der obigen Vorgehensweise mit den gegebenen Punkten den nebenstehenden Plot:



Die unterschiedlichen Regression, die man im Listeneditor unter F4 3 findet, kann man auch im HOME-Bildschirm mit zwei Listen direkt aufrufen und sich mit StatAnz die Ergebnisse anzeigen lassen. (Vgl. Skript S. 33f)

Man vergleiche für den letzten Abschnitt auch das TI-Handbuch S 87 ff.

10. Differenzialgleichungen

10.1 Richtungsfelder

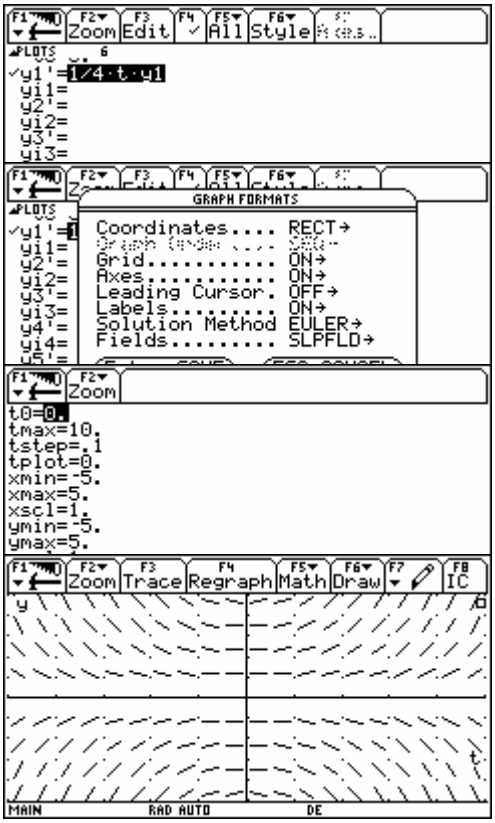
Das Richtungsfeld einer Differenzialgleichung 1. Ordnung zeichnen:

Man zeichne das Richtungsfeld der Dgl. $y'(x) = \frac{1}{4} \cdot x \cdot y(x)$ für $x \in [-5;5]$ und $y \in [-5;5]$

1) Den Rechner auf das Richtungsfeld einer Dgl. vorbereiten (falls noch nicht geschehen): MODE Graph……..DIFF EQUATIONS ENTER

2) Die Differenzialgleichung an die Notation des Rechners anpassen: Der Rechner nimmt an, *y* sei eine Funktion von *t* und nicht von *x*. Also ersetzt man *x* durch *t* und *y* durch *y*1 und erhält die angepasste Dgl.

$$y1'(t) = \frac{1}{4} \cdot t \cdot y(t)$$



3) Mit ◊ Y= eventuell vorhandene alte Funktionen löschen (oder mit F4 deaktivieren.

4) Angepasste Dgl. eingeben:

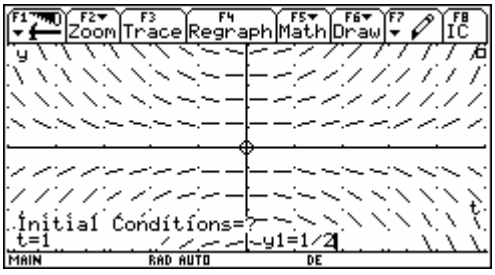
5) Mit ◊ F eventuell Optionen wählen (müssen nicht jedes Mal eingestellt werden). Die Option Fields sollte auf SLPFLD eingestellt sein.

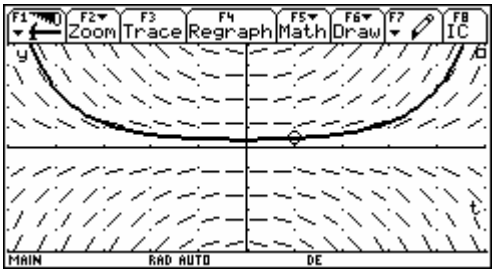
ENTER

6) Fenstervariablen einstellen: ◊ WINDOW

.7) Richtungsfeld zeichnen ◊ GRAPH

Gesucht ist nun eine spezielle Lösung, die durch den Punkt (1; ½) geht: Mit F8 und den Anfangsbedingungen 1 ENTER und 1/2 ENTER erhält man





Lösung einer Differenzialgleichung 1. Ordnung

10.2 Lösung einer Differenzialgleichung 1. Ordnung

Allgemeine Lösung: Die allgemeine Lösung der Dgl. $y' = y \cdot \sin(x)$ erhält man durch desolve(y´=y*sin(x),x,y) ENTER y=@1·e$^{-\cos(x)}$ (´mit 2nd B) ⟶

Der frei wählbare Parameter @1 entspricht dabei der Konstanten c_1.

Spezielle Lösung: Die spezielle Lösung der Dgl. $y' = y \cdot \sin(x)$ $y(0) = a$ erhält man durch desolve(y´=y*sin(x) and y(0)=a,x,y) ENTER y= a·e$^{1-\cos(x)}$ ⟶

10.3 Lösung einer Differenzialgleichung 2. Ordnung

Allgemeine Lösung: Die allgemeine Lösung der Dgl. $y'' + 2 \cdot y' + y = 0$ erhält man durch desolve(y´´+2·y´+y,x,y) ENTER y=(@1·x+@2)·e^{-x} ⟶

Die frei wählbaren Parameter @1 und @2 entsprechen dabei den Konstanten c_1 und c_2.

Spezielle Lösung:

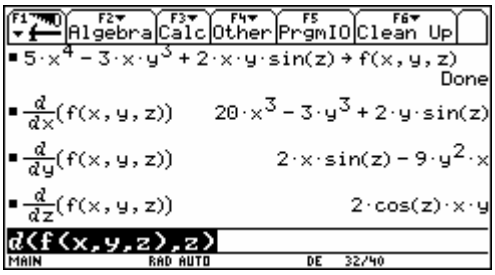
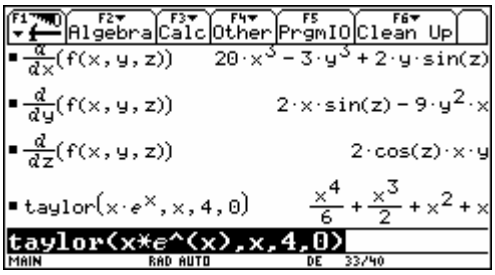
Die Lösung des Anfangswertproblems
$y'' + 2 \cdot y' + y = 0 \quad y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ erhält man durch
desolve(y´´+2·y´+y and y(0)=1 and y´(0)=0,x,y) ENTER y=(x+1)·e^-x

Die Lösung des Randwertproblems
$y'' + 2 \cdot y' + y = 0 \quad y(0) = 1$ und $y(1) = 1$ erhält man analog durch
desolve(y´´+2·y´+y and y(0)=1 and y(1)=1,x,y) ENTER y=(1 – x)·e^-x

Die analytische Lösung von Differenzialgleichungen der Ordnung 3 und höher wird (z.Z.) vom Rechner nicht unterstützt.

Nachtrag: Analysis
Partielle Ableitungen
5*x^4-3*x*y^3+2*x*y*sin(x) STO▶ f(x,y,z) Done ⟶

Als partielle Ableitungen erhält man dann :



Taylorreihe
Wie lautet die Taylorreihe der Funktion $y=x*e^x$ bis n=4
(einschließlich der 4. Ableitung) entwickelt um die Stelle $x_0=0$?